Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Wintersemester 2012/13**

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 13

Abgabe: 24.1.2013, 8.00 Uhr - 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

49. (6 Punkte) Berechnen Sie aus den Vektoren $1, x, x^2, x^3$ eine Orthonormalbasis für den Raum P_3 der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

50. Seien V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zu f gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung f^* mit

$$< f(v), w > = < v, f^*(w) > \quad \forall v, w \in V,$$

die sog. zu f *adjungierte* Abbildung. Zeigen Sie:

a) Die Abbildungen

$$g_1 = \frac{1}{2}(f + f^*), \quad g_2 = \frac{1}{2i}(f - f^*), \quad g_3 = f \circ f^*, \quad g_4 = f^* \circ f$$

sind selbstadjungiert.

b) Zwei der folgenden drei Eigenschaften implizieren die dritte:

(i) f ist unitär, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt $< f(v), f(w) > = < v, w >$.

(ii) f ist selbstadjungiert.

(iii) Es gilt $f \circ f = \mathrm{id}_V$.

51. (4 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$M_{\lambda,\mu} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \lambda & \frac{1}{2} \\ \lambda & 0 & \mu \\ \frac{1}{2} & \mu & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mit komplexen λ und μ.
a) Für welche Werte von λ und μ ist $M_{\lambda,\mu}$ hermitesch? Gibt es unter diesen sogar positiv definite Matrizen?
b) Für welche Werte von λ und μ ist $M_{\lambda,\mu}$ unitär?

52. Beweisen Sie: Zu jeder hermiteschen, positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gibt es genau eine hermitesche, positiv definite Matrix B mit $B^2 = A$. Man schreibt daher auch $\sqrt{A} := B$.

Die Anmeldung zur Klausur erfolgt über KLIPS. Weitere Informationen erhalten Sie in Kürze in der Vorlesung oder auf der Vorlesungsseite.

Heiteres aus der Mathematik:

Es war einmal ein Mädchen, dem wurde eineindeutig eine rote Kappe zugeordnet, wodurch es als Rotkäppchen definiert wurde. „Kind," argumentierte die Mutter, „werde kreativ, mathematisiere die kürzeste Verbindung des Weges zur Großmutter, analysiere aber nicht die Blumen am Wege, sondern formalisiere Deinen Weg in systematischer Ordnung." Rotkäppchen vereinigte einen Kuchen, eine Wurst und eine Flasche Wein zu einer Menge, hinterfragte noch einmal den Weg und ging los.
Im Walde schnitt sein Weg den eines Wolfes. Er diskutierte mit ihr über die Relevanz eines Blumenstraußes und motivierte es, einen geordneten, höchstens abzählbaren Strauß zu verknüpfen. Inzwischen machte sich der Wolf die Großmutter zu einer Teilmenge von sich.
Als Rotkäppchen dann ankam, fragte es: „Großmutter, warum hast Du so große Augen?"
„Ich habe gerade mein Bafög erhalten!"
„Großmutter, warum hast Du so große Ohren?"
„Ich habe versucht, Prüfungsfragen durch die Tür zu erlauschen!"
„Großmutter, warum hast Du so ein großes Maul?"
„Ich habe gerade versucht, das Mensaessen zu schlucken!"
Darauf machte der Wolf sich zur konvexen Hülle von Rotkäppchen.
Ein Jäger kam, sah eine leere Menge von Großmüttern im Haus und problematisierte die Frage, bis sie ihm transparent wurde. Dann nahm er sein Messer und machte aus dem Wolf eine Schnittmenge. Die im Wolf integrierten Personen wurden schleunigst von ihm subtrahiert. Zum Wolf wurde eine mächtige Menge von Steinen addiert. Er fiel in einen zylinderförmigen kartesischen Brunnen, bis seine Restmenge nicht mehr lebte.