Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2013

Probeklausur zur Mathematik II
für Physiker und Lehramtsstudierende

Aufgabe 1: Untersuchen Sie folgende Anfangswertprobleme auf Lösbarkeit und Eindeutigkeit der Lösung und lösen Sie sie:

a) $y' = \frac{y\ln(y)}{\sin(x)}$ mit $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^e$;

b) $xy' = y - x - xe^{-\frac{y}{x}}$ mit $y(1) = 0$;

c) $y' + \frac{y}{x+1} = e^{2x}$ mit $y(0) = \eta$.

Aufgabe 2: Die Differentialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$$

mit $g, k \in C^0(I)$, $h \in C^1(I)$, $h(x) \neq 0$ in I, geht durch die Transformation

$$u(x) = e^{\int h(x)y(x)\,\mathrm{d}x}$$

über in die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' + \left(g - \frac{h'}{h}\right)u' - khu = 0.$$

Benutzen Sie diesen Zusammenhang zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - y + e^x y^2 + 5e^{-x} = 0, \quad y(0) = \eta.$$

Aufgabe 3: Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y+x^5}{x^4+y^4} & , \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$.

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in allen $(x, y) \neq (0, 0)$.

c) Untersuchen Sie, ob f in $(0, 0)$ stetig ist.

Aufgabe 4: Berechnen Sie mittels der Theorie der Extrema unter Nebenbedingungen das Maximum und das Minimum der Funktion f mit $f(x,y,z) = x - y - z$ auf der Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 - 1 = 3x - 4z = 0\}.$$

Aufgabe 5: Es seien $0 < p < 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $q < 0$. Ferner seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ messbar und nichtnegativ. Dann gilt

$$\int_I |fg| \,\mathrm{d}x \geq \left(\int_I |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_I |g|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

falls $\int_I |g|^q \,\mathrm{d}x < \infty$.
Hinweis: Wenden Sie die Hölder-Ungleichung mit $p' := \frac{1}{p} \geq 1$ auf die Funktionen $|fg|^p$ und $|g|^{-p}$ an.

Aufgabe 6: Bestimme unter Verwendung der Fouriertransformation eine Lösung der DGL

$$y'' + a^2 y = g(x), \quad y = y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7: Es sei M die Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 6, 2y^2 + z^2 = 3\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Welche Dimension besitzt sie? Bestimmen Sie außerdem den Tangentialraum T_pM und den Normalenraum N_pM am Punkt $p = (2, -1, 1) \in M$.

Aufgabe 8: Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3$ die 1-Formen

$$\omega_1 := (x^2 - yz)\mathrm{d}x + (y^2 - zx)\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \omega_2 := \omega_1 + 2xy\mathrm{d}z.$$

a) Existiert auf $\mathbb{R}^3$ eine 0-Form τ mit $\mathrm{d}\tau = \omega_1$? Falls ja, bestimmen Sie sie.

b) Gilt $\mathrm{d}\omega_2 = 0$?

c) Berechnen Sie das Integral von ω_1 längs der Schraubenlinie

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), ct)^\top, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 9: Berechnen Sie für den Einheitswürfel $W = [0,1]^3$ und das Vektorfeld $\mathbf{v} = (x^2, yz, y)^\top$ beide im Gaußschen Integralsatz auftretenden Integrale.

Aufgabe 10: Gegeben seien $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + (z+2)^2 \leq 3, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2, x \geq 0\}$ und das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y + z^2 \\ x - 2z \\ -2xz + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{S},$$

wobei F die Oberfläche von B bezeichne.

Aufgabe 11: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine holomorphe Funktion $l : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorpher Logarithmus zu* f, wenn $\exp(l(z)) = f(z)$ für alle $z \in U$ gilt.
Sei nun G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (i) f besitzt einen holomorphen Logarithmus.

   (ii) $\frac{f'}{f}$ besitzt eine holomorphe Stammfunktion.

   (iii) $\int_\gamma \frac{f'}{f} \, \mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G.

b) Zeigen Sie, dass zu zwei holomorphen Logarithmen l_1, l_2 von f eine ganze Zahl k existiert, so dass $l_1 - l_2 \equiv 2\pi i k$ gilt.

Aufgabe 12: Sei $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Bestimmen Sie das Wegintegral

(i) längs einer geschlossenen Kreislinie mit dem Radius $\varepsilon > 0$ um i und

(ii) längs des geschlossenen Weges, welcher durch die Strecke von $-R$ nach $+R$ und den Halbkreisbogen γ_R von R nach $-R$ im Gegenuhrzeigersinn (in der oberen Halbebene) gebildet wird. Dabei sei $R \geq 2$.