Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2013

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 2

Abgabe: 25.04.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

5. (6 Punkte) a) Seien $p, q, r : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, q nichtfallend und $r \geq 0$. Es gelte

$$p(x) \leq q(x) + \int_a^x r(t)p(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in [a, b].$$

Beweisen Sie, dass dann

$$p(x) \leq q(x) \cdot e^{R(x)} \quad \forall x \in [a, b]$$

mit $R(x) := \int_a^x r(t)\,\mathrm{d}t$. Ist $r(x) = c$, so gilt insbesondere

$$p(x) \leq q(x) \cdot e^{c(x-a)}.$$

b) Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ auf $[a, b]$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y)\ , \quad y(x_0) = y_0$$

mit $x_0 \in [a, b]$. Für $\alpha > 0$ bezeichne U_α die Menge aller Punkte $(x, y) = (x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, für die $x \in [a, b]$ und $\|y - \varphi(x)\| \leq \alpha$. Ferner existiere ein $\alpha > 0$, so dass $f(x, y)$ in U_α stetig ist und einer Lipschitz-Bedingung wie in Definition 8.3.2 genügt. Zeigen Sie, dass dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass jede Lösung ψ des „gestörten“ Problems

$$z' = f(x, z)\ , \quad z(x_0) = z_0$$

mit $\|y_0 - z_0\| < \delta$ in ganz $[a, b]$ existiert und für alle $x \in [a, b]$ der Ungleichung

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| < \varepsilon$$

genügt.

6. (4 Punkte) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^{(2,2)}$$

eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $y' = Ay$ besitze die spezielle Lösung $\varphi = \binom{\varphi_1}{\varphi_2} : I \to \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subset I$ gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Zeigen Sie, dass man durch den Ansatz

$$\psi(x) = u(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

eine weitere von φ linear unabhängige Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ erhält, wobei $u, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g \not\equiv 0$ sind, die den Differentialgleichungen

$$g' = \left(a_{22} - a_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)g \quad , \quad u' = \frac{a_{12}}{\varphi_1}\, g$$

genügen.

7. Bestimmen Sie alle Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

8. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichungen

a) $y'' + 4y' + 4y = e^x$,

b) $y'' - 2y' + 5y = e^x$.

Geben Sie insbesondere jeweils die der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ genügende Lösung an.

Mathematische Beweismethoden (nicht ganz ernst gemeint):

- Methode der exakten Bezeichnungen:
  Sei p ein Punkt q, wir wollen ihn r nennen.

- Beweis durch überladene Notation:
  Am besten, man verwendet mindestens vier Alphabete und viele Sonderzeichen. Hier reicht das griechische Alphabet alleine nicht mehr aus, um engagierte Zuhörer abzuschrecken. Ein kurzer Exkurs in die hebräischen Sonderzeichen sollte aber auch den stärksten Zweifler zum Schweigen bringen.