Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2013**

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 3

Abgabe: 02.05.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

9. Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen metrische Räume sind:
a) $\mathbb{C}$ mit

$$d(z,w) := \begin{cases} |z-w| & \text{, falls } z = \lambda w \text{ für ein } \lambda > 0 \\ |z|+|w| & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \text{für } z,w \in \mathbb{C};$$

b) Der Raum $\mathcal{C}([a,b])$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[a,b]$ mit

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \text{ für } f,g \in \mathcal{C}([a,b]);$$

c) Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Zahlenfolgen mit

$$d((a_n)_n,(b_n)_n) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k-b_k|}{1+|a_k-b_k|}\,.$$

10. Sei D eine nicht-leere, abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes X. Der Operator $T : D \to X$ genüge der Bedingung

$$d(T(x),T(x')) \le q\, d(x,x') \quad \forall x,x' \in D$$

mit einem $q \in]0,1[$ und bilde D in sich ab, d.h. es gelte $T(D) \subset D$. Zeigen Sie:

a) Der Operator T hat genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $\bar{x} \in D$ mit $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

b) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_{n+1} := T(x_n)$ gegen $\bar{x}$.

c) Es gilt die Abschätzung

$$d(x_n,\bar{x}) \le \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1,x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

11. Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen kompakt sind:

a) $]0,1]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

b) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

Geben Sie für die nicht-kompakten Mengen eine offene Überdeckung an, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

12. Sei (X, d_X) ein zusammenhängender metrischer Raum. Beweisen Sie:

a) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen. Existiert ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) > 0$, so gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in X$.

b) Sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum mit der *diskreten Metrik*

$$d_Y(x,y) := \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}, \quad x, y \in Y.$$

Dann ist $f : X \to Y$ genau dann stetig, wenn f konstant ist.

Mathematische Beweismethoden (nicht ganz ernst gemeint):

- Prähistorische Methode:
  Das hat irgendwann schon mal jemand gezeigt.

- Zeitlose Methode:
  Man beweise so lange herum, bis niemand mehr weiß, ob der Beweis nun schon zu Ende ist oder noch nicht.