

Übungen zur Mathematik II
für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 4

Abgabe: 10.05.2013, 8.00 Uhr bis 14.00 Uhr, in die Übungsfächer

13. Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Abbildungen:

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für $y \neq \frac{1}{x}$;
b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (xy, \cosh(xy), \ln(1+x^2))$;
c) $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (3x^2y^3z + z^2x, 3x \sin(x^2 + y), e^{xyz})$.

14. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Man nennt eine Funktion f *positiv homogen vom Grad* $r \in \mathbb{R}$, wenn

$$f(tx) = t^r f(x) \quad \text{für alle } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Beweisen Sie, dass f genau dann positiv homogen vom Grad r ist, wenn die *Eulersche Differentialgleichung*

$$D_x f(x) = r \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

erfüllt ist.

15. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^6+y^5}{x^4+y^4} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- a) Untersuchen Sie, ob f in $(0, 0)$ stetig ist.
b) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.
c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t} f(0, 0)$.
d) Ist f total differenzierbar?

16. Seien

$$f : [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & , \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

sowie

$$g(y) := \int_0^1 f(x, y) dx, \quad g^*(y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in [-1, 1].$$

Zeigen Sie:

- a) Die Funktionen g und g^* sind auf $[-1, 1]$ definiert.
- b) g ist auf $[-1, 1]$ differenzierbar, aber es gilt $g'(0) \neq g^*(0)$, d.h., Differentiation und Integration sind i.a. nicht vertauschbar.

Warum steht das Resultat dieser Aufgabe nicht im Widerspruch zu Satz 9.2.16?

Heiteres aus der Mathematik:

Auf Löwenjagd in der Wüste:

Die metrische Methode

Wir stellen einen Käfig in die Wüste, verlassen diese unauffällig und definieren in ihr die indiskrete Metrik, d.h. der Abstand zwischen allen Punkten ist 0. Insbesondere ist also der Abstand zwischen Löwe und Käfig gleich 0, d.h. der Löwe ist im Käfig.