Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2013

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 5

Abgabe: 16.05.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

17. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^{xz} - 1.$$

a) Zeigen Sie, dass auf einer Umgebung U um den Punkt $(0, -1)$ eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $g(0, -1) = 1$ und $f(x, y, g(x, y)) = 0$ existiert.

b) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{grad} g(x, y) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y))\Big)$$

für alle $(x, y) \in U$ gilt, und beweisen Sie, dass g auf U sogar zweimal stetig differenzierbar ist. Berechnen Sie auch die Hesse-Matrix $H_g(0, -1)$.

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung zu g um den Punkt $(0, -1)$.

18. (4 Punkte) Die Aussage von Satz 9.4.8 lässt sich auf den Fall $D \subset \mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Bestimmen Sie hiermit denjenigen Punkt (x_0, y_0, z_0) auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, der vom Punkt $(1, -1, 0)$ den kleinsten (euklidischen) Abstand hat.

19. Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert der Funktion f gegeben durch

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy$$

auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$.

20. Berechnen Sie die Krümmung folgender Kurven:

a) $\alpha : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2 , \quad t \mapsto (t, at + b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$;

b) $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ , \quad t \mapsto e^{\lambda t}(\cos(t), \sin(t));$

c) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\ , \quad t \mapsto R(t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$

Hinweis: Für eine nicht nach Bogenlänge parametrisierte Kurve γ bestimmt man die Transformation s gemäß Satz 9.5.9, so dass $\chi = \gamma \circ s^{-1}$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, und definiert die Krümmung durch

$$\kappa_\gamma(t) = \kappa_\chi(s(t)).$$

Wie man κ_χ berechnet, ist aus der Vorlesung bekannt.
Verwenden Sie außerdem $\sqrt{2 - 2\cos(t)} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$.

Heiteres aus der Mathematik:

Ein Ingenieur kann sich am Vortrag eines Physikers nicht von zwei Dingen erholen:

1. spricht der Redner von 8-dimensionalen Räumen, und
2. scheint der Mathematiker neben ihm alles zu verstehen.

In der Pause fragt er den Mathematiker, wie er das nur verstehen könne, worauf dieser meint: „Zuerst stelle ich mir einen n-dimensionalen Raum vor. Dann vereinfache ich das Problem auf $n = 8$!“