Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2013

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 6

Abgabe: **31.05.2013, 8.00 Uhr bis 14.00 Uhr**, in die Übungsfächer

21. Seien $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : U \to \mathbb{R}^n$ Vektorfelder und $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ stückweise stetig differenzierbare Kurven in U mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen gelten:

a) $\int_\gamma (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2)\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \lambda_1 \int_\gamma \mathbf{v}_1 \, \mathrm{d}\mathbf{s} + \lambda_2 \int_\gamma \mathbf{v}_2 \, \mathrm{d}\mathbf{s}$ für $\lambda_, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;

b) $\int_{-\gamma} \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_\gamma \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{s}$;

c) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{\gamma_2} \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{s}$;

d) $\left|\int_\gamma \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{s}\right| \leq \max_{x \in \gamma([a,b])} \|\mathbf{v}(x)\| L_\gamma$, wobei $\|.\|$ die euklidische Norm bezeichnet.

22. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{v} :]0, \infty[\times]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \frac{z}{x} \\ \frac{z}{y} \\ \ln(xy) \end{pmatrix} \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α das Vektorfeld $\mathbf{v}$ ein Potential besitzt, und berechnen Sie dieses.

c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ längs der Kurve γ mit

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 1 \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

23. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Funktionen sind Lebesgue-integrierbar, welche nicht? Geben Sie bei den Lebesgue-integrierbaren Funktionen die Werte der Integrale an.

a) $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$;

b) $g :]0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = x^\alpha$;

c) $\chi_{\mathbb{N}}$, $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $\chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$.

24. Sei I ein offenes Intervall, $t \in I$, $D \subset \mathbb{R}$ und $f : I \times D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Für $s \in I$ ist $f(s, \cdot) : x \mapsto f(s, x)$ Lebesgue-integrierbar.

b) Für $x \in D$ ist $f(\cdot, x) : t \mapsto f(t, x)$ auf ganz I differenzierbar mit Ableitung $f'(\cdot, x)$.

c) Es existiert eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g \geq 0$ auf D, so dass für alle $x \in D$ und $s \neq t$ gilt

$$\left| \frac{f(s,x) - f(t,x)}{s - t} \right| \leq g(x).$$

Dann ist die Funktion $\psi(t) := \int_D f(t, x)\, \mathrm{d}x$ auf I differenzierbar mit Ableitung

$$\psi'(t) = \int_D f'(t, x)\, \mathrm{d}x.$$

Heiteres aus der Mathematik:

Der Kreis ist eine geometrische Figur, bei der an allen Ecken und Enden gespart wurde.

Auf Löwenjagd in der Wüste:
Die Peano-Methode
Man konstruiere eine Peano-Kurve durch die Wüste, also eine stetige Kurve, die durch jeden Punkt der Wüste geht. Es ist gezeigt worden, dass man eine solche Kurve in beliebig kurzer Zeit durchlaufen kann. Mit dem Käfig unter'm Arm durchlaufe man die Kurve in kürzerer Zeit, als der Löwe benötigt, um sich um seine eigene Länge fortzubewegen.