Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2013**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 7

Abgabe: 06.06.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

25. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int_M ye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$ mit $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0, x < y\}$.

26. Seien $p \geq 1$ und $f, g \in L_p(I)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f+g \in L_p(I)$ und dass gilt

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Hinweis: Dies ist im Wesentlichen Aussage (2) aus Satz 10.3.2. Da der Beweis dort ausgelassen wurde, soll er hier nachgeholt werden. Einfach Satz 10.3.2 anzuwenden, reicht daher nicht aus.

27. Auf $[0,3]$ seien die stetigen Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & \text{für } 1 - \frac{1}{n} \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ n(2-x)+1 & \text{für } 2 < x \leq 2 + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } 2 + \frac{1}{n} < x \leq 3 \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 2}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion f. Begründen Sie außerdem, warum gilt $f \in L_2([0,3])$.

b) Beweisen Sie, dass $(f_n)_{n\geq 2}$ auch in $L_2([0,3])$ gegen f konvergiert, und folgern Sie, dass $C([0,3])$ nicht vollständig ist, wenn er mit der L_2-Norm $\|\cdot\|_2$ versehen wird.

28. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $l_2 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ konvergiert}\}$ ein Hilbertraum ist.

a) Zeigen Sie, dass die Familie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bestehend aus den Folgen $b_n := (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}}$, eine Hilbertbasis in l_2 bildet.

b) Finden Sie eine beschränkte Folge in l_2, die keine konvergente Teilfolge besitzt. D.h. der Satz von Bolzano-Weierstraß, wie er Ihnen aus dem Reellen bekannt ist (Satz 1.4.18), gilt in l_2 nicht.

c) Sei $x \in l_2$. Bestimmen Sie die Projektion von x auf den von $b_1, \ldots, b_n$ aufgespannten Unterraum von l_2, d.h. finden Sie ein $y \in \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$, so dass $\|x - y\| \leq \|x - z\|$ für alle $z \in \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$.

Mathematische Beweismethoden (nicht ganz ernst gemeint):

- Beweis durch konfuse Lehrkörper:
  Der Professor sagt A, schreibt B, meint dabei C, rechnet weiter mit D, bekommt E heraus, aber F wäre richtig gewesen.

- Beweis durch Verwirrung:
  Eine lange, zusammenhanglose Folge von wahren und/oder bedeutungslosen, syntaktisch verwandten Aussagen wird verwendet. Während der engagierte Leser noch versucht, den roten Faden zu finden, wird er durch parallele Anwendung der 'überladenen Notation' (vgl. Blatt 2) verwirrt.