Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2013**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 10

Abgabe: 27.06.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

37. (6 Punkte) Für $0 < k, \ell \leq n$ seien Differentialformen $\omega = f\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, $\tilde{\omega} = \tilde{f}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ und $\sigma = g\,\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_\ell}$ gegeben.

a) Beweisen Sie für die obigen Formen Hilfssatz 11.3.11.

b) Seien nun ω und σ allgemeine Differentialformen der Ordnung k bzw. ℓ. Berechnen Sie mit Hilfssatz 11.3.11, in Abhängigkeit von k, die Ableitung

$$\mathrm{d}\big((\mathrm{d}\omega) \wedge \sigma - \omega \wedge \mathrm{d}\sigma\big).$$

38. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass zu den folgenden Differentialformen $\omega \in \Omega^2\mathbb{R}^3$ jeweils Differentialformen $\tau \in \Omega^1\mathbb{R}^3$ existieren mit $\mathrm{d}\tau = \omega$:

a) $\omega = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\cos(z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - (\sin(z) + xe^y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$;

b) $\omega = 2z\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + ze^x\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - 3x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

39. (4 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ seien Vektorfelder auf U. Berechnen Sie $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ durch Übersetzen in den Differentialformenkalkül (vgl. Abschnitt 11.4).

40. (6 Punkte) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$ und ein Vektorfeld $\mathbf{v}(x,y) = \binom{x+y^2}{x^2-2xy}$ gegeben.

a) Skizzieren Sie die Menge A und geben Sie eine Kurve an, die den Rand ∂A von A beschreibt.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial A} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$, indem Sie es als Kurvenintegral auffassen.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial A} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\partial A} v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y$ mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes.

Mathematische Beweismethoden (nicht ganz ernst gemeint):

- Beweis durch Widerspruch:
  „Das ist so. Widerspricht mir jemand? Nein? Gut, dann ist es also bewiesen!“

- Beweis durch Einschüchterung:
  „Das ist doch wohl trivial!“