Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2013**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 11

Abgabe: 04.07.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

41. Gegeben sei die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

und die Funktion $f : M \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Berechnen Sie das Integral $\int_M f \,\mathrm{d}S$, indem Sie M

a) als Rotationskörper auffassen, der durch Rotation der Kurve $z = x^2$, $0 < x < 1$, um die z-Achse entsteht.

b) als Graphen einer Funktion auf dem offenen Einheitskreis auffassen.

42. (6 Punkte) Gegeben sei die Menge

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

und das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ z^3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \,\mathrm{d}(x, y, z)$ sowie $\int_{\partial V} \mathbf{v} \,\mathrm{d}\mathbf{S}$. Stimmt das Ergebnis mit der Aussage des Gaußschen Integralsatzes überein?

43. a) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Fläche mit glattem Rand ∂B, U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit $B \subset U$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ (beliebig oft) differenzierbare Funktionen. Leiten Sie aus dem Satz von Stokes die Gleichung

$$\int_{\partial B} f \,\mathrm{d}x + g \,\mathrm{d}y = \int_B \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big) \,\mathrm{d}(x, y)$$

her.
b) Berechnen Sie hiermit $\int_S \big((x - y)^3 \,\mathrm{d}x + x^3 \,\mathrm{d}y \big)$, wobei S die Kreislinie um 0 mit Radius 1 in $\mathbb{R}^2$ ist.

44. (4 Punkte) Sei $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet G. Beweisen Sie: Gilt $u = h \circ v$ mit einer differenzierbaren Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist f konstant.

Mathematische Beweismethoden (nicht ganz ernst gemeint):

- Wischtechnik-Methode:
  Man wischt die entscheidenden Stellen des Beweises sofort nach dem Anschreiben wieder weg (rechts schreiben, links wischen).

- Beweis durch rekursiven Querverweis:
  „In Quelle a wird Satz 5 gefolgert aus Satz 3 der Quelle b, welcher seinerseits sofort aus Korollar 6.2 der Quelle c folgt, den man trivial aus Satz 5 der Quelle a erhält.“