Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2013**

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 12

Abgabe: 11.07.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

45. Sei γ eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve. Leiten Sie eine Relation zwischen dem Integral $\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$ und der von γ eingeschlossenen Fläche her.

46. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ keine Stammfunktion besitzt.
b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\gamma_k} ze^{iz^2}\,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_k} \frac{1}{(z-k)^3}\,\mathrm{d}z$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei die Pfade gegeben sind durch

$$\gamma_k(t) := (5 + \sin(kt))e^{it}$$

mit $t \in \left[\frac{\pi}{k}, \frac{\pi(k+1)}{k}\right]$.

47. (4 Punkte) a) Beweisen Sie folgende Variante des Integrallemmas von Goursat, indem Sie den dortigen Beweis geeignet anpassen:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $Q \subset D$ ein achsenparalleles Rechteck. Ist $\psi : Q \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\psi(Q) \subset D$, dann gilt

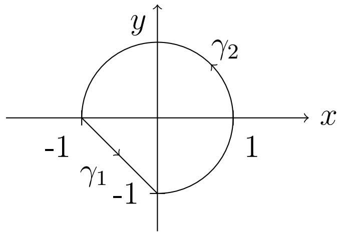
$$\int_{\psi(\partial Q)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

b) Seien $\alpha, \beta : [a,b] \to D$ zwei stetig differenzierbare Kurven in D, so dass $(1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t) \in D$ für alle $t \in [a,b]$ und alle $\tau \in [0,1]$. Wir setzen $h_a(\tau) := (1-\tau)\alpha(a) + \tau\beta(a)$ und $h_b(\tau) := (1-\tau)\alpha(b) + \tau\beta(b)$ für $\tau \in [0,1]$. Folgern Sie mit a), dass gilt

$$\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{h_b} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{h_a} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Insbesondere gilt das Integrallemma von Goursat also (?) auch für Dreiecke anstelle von Rechtecken.

48. (6 Punkte) Sei γ_1 die Strecke von -1 nach $-i$ und γ_2 der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreisbogen von $-i$ bis -1.



Gegeben seien ferner die Funktionen $f(z) = z$ und $g(z) = \frac{e^z}{z^3 - 2z^2}$.

a) Berechnen Sie das Integral $\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ und verifizieren Sie damit den Cauchyschen Integralsatz.

c) Berechnen Sie für die geschlossene Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ das Integral $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$.

Heiteres aus der Mathematik:

Eine fortgeschrittene Zivilisation hat eine Möglichkeit entdeckt, wie man Wissen in Pillenform packen kann. Ein Student geht in eine Apotheke, um ein bisschen zu lernen:
Student: „Ich hätte gerne eine Pille für die französische Sprache.“
Der Apotheker verschwindet kurz in seinem Lager und kommt kurz darauf mit der gewünschten Pille zurück. Der Student schluckt sie und beherrscht sofort die französische Sprache.
Student: „Jetzt würde ich mir gerne ein wenig Wissen in Biologie aneignen.“
Der Apotheker verschwindet wieder kurz in seinem Lager und gibt dem Studenten kurz darauf die entsprechende Pille.
Student: „Wie sieht es denn mit Mathematik aus. Haben Sie dafür auch Pillen?“
Apotheker: „Klar!“
Er verschwindet abermals kurz in seinem Lager, um dann mit einer riesigen Pille in der Größe eines Tischtennisballs wiederzukommen.
Student: „Muss ich für Mathematik tatsächlich diese große Pille zu mir nehmen???“
Apotheker: „Ja, Mathematik war schon immer schwer zu schlucken.“