Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. Christoph Heuser

Wintersemester 2013/14

Übungen zur Statistik I
Serie 4

Abgabe: Dienstag, 12. November 2013, vor der Vorlesung

16. Eine Zufallsvariable X besitze die Lebesgue-Dichte f_ϑ. Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ für

$$H : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{gegen} \quad K : \vartheta = \vartheta_1,$$

wenn $f_{\vartheta_0}(x) = e^{-x} 1_{(0,\infty)}(x)$ und $f_{\vartheta_1}(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x} 1_{(0,\infty)}(x)$ ist.

17. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $E(0, \vartheta)$-verteilt mit $\vartheta > 0$. Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α für $\tau \leq \vartheta$ gegen $\tau > \vartheta$.

18. Sei P_ϑ, $\vartheta \in \mathbb{R}$, die von einer Verteilung mit positiver stetiger Dichte erzeugte Lageparameter-Familie. Dann hat die Familie monotone Dichtequotienten in $T(x) = x$ genau dann, wenn $\log f$ konkav ist.

Sei $\Theta' \subset \Theta$.
Definition 1: Ein Test φ heißt α-*ähnlich auf* Θ', wenn $E_\vartheta \varphi = \alpha \ \forall \vartheta \in \Theta'$.
Sei zusätzlich T eine suffiziente Statistik für $\vartheta \in \Theta'$.
Definition 2: Ein Test φ *besitzt Neyman-Struktur auf* Θ' *(bezüglich* T*)*, falls es eine Konstante $\alpha \in (0, 1)$ gibt mit

$$E_\vartheta(\varphi | T = t) = \alpha \quad \text{für } P_\vartheta^T\text{-fast alle } t, \forall \vartheta \in \Theta'.$$

19. Sei $\Theta' \subset \Theta$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Besitzt ein Test φ Neyman-Struktur auf Θ' (bezüglich einer suffizienten Statistik T), dann ist φ α-ähnlich auf Θ'.

b) Ist T eine suffiziente und vollstï¿$\frac{1}{2}$ndige Statistik für $\vartheta \in \Theta'$ und φ ein α-ähnlicher Test auf Θ', dann besitzt φ Neyman-Struktur auf Θ' bezüglich T.

20. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig N_{μ_1,σ^2}-verteilt und $Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig N_{μ_2,σ^2}-verteilt mit bekanntem σ^2. Außerdem seien alle X_i unabhängig von allen Y_j. Gegeben sei ferner ein $\alpha \in (0, 1)$.

a) Entwickeln Sie einen (möglichst guten um δ symmetrischen) Test zum Niveau α für

$$H : \mu_1 - \mu_2 = \delta \quad \text{gegen} \quad K : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta.$$

b) Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für $\mu_1 - \mu_2$ an.