Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. Christoph Heuser

Wintersemester 2013/14

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 10

Abgabe: Dienstag, 14. Januar 2014, vor der Vorlesung

Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängig mit Verteilungsfunktion F. Sei $g(X_1, \dots, X_m)$ integrierbar und symmetrisch in den Argumenten. Die zu $X_1, \dots, X_n$ mit $n \geq m$ gehörige *U-Statistik* ist

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{\{i_1,\dots,i_m\} \subset \{1,\dots,n\}} g(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}).$$

46. Die Folge $(U_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq m}$ mit $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}((X_{1:n}, \dots, X_{n:n})^\top, X_{n+1}, \dots)$ ist ein Rückwärtsmartingal.
Hinweis: Es gilt $U_n = E(g(X_1, \dots, X_m) | X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$.

47. Setze $\bar{g} = g - E[g(X_1, \dots, X_m)]$ und definiere

$$\begin{aligned} g_k(x_1, \dots, x_k) &= E[g(x_1, \dots, x_k, X_{k+1} \dots, X_m)] \\ &= E(g(X_1, \dots, X_m) | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine U-Statistik U_n mit $E[g^2(X_1, \dots, X_m)] < \infty$ gilt

$$\operatorname{Var}(U_n) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n-m}{m-k} \zeta_k$$

mit $\zeta_k := \operatorname{Var}(g_k(X_1, \dots, X_k))$.

48. Zeigen Sie unter den Voraussetzungen aus Aufgabe 47:

a) Es gilt $\zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \dots \leq \zeta_m$.

b) Sei m fest und k zwischen 1 und m so, dass $\zeta_j = 0$ für $j < k$ und $\zeta_k > 0$, dann gilt
$$\operatorname{Var}(U_n) = \frac{k! \binom{m}{k}^2 \zeta_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

49. Definiere $\check{U}_n = EU_n + \frac{m}{n}\sum_{i=1}^n (g_1(X_i) - E[g(X_1, \dots, X_m)])$ mit $\bar{g}_1$ wie in Aufgabe 48. Sei $E[g^2(X_1, \dots, X_m)] < \infty$ und $\zeta_1 > 0$.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$E[(U_n - \check{U}_n)^2] = O(n^{-2}).$$

b) Folgern Sie

$$\sqrt{n}(U_n - EU_n) \Rightarrow N_{0,m^2\zeta_1}.$$

50. Geben Sie für folgende Funktionen die zugehörigen U-Statistiken an und berechnen Sie $\check{U}_n$, $\mathrm{Var}(U_n)$ und die asymptotische Verteilung von U_n.

a) $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$,

b) $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$,

c) $g(x_1, x_2) = 1_{(-\infty,0]}(x_1 + x_2)$.