Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. Christoph Heuser **Sommersemester 2014**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen
Serie 5
Abgabe: Dienstag, 20. Mai 2014, vor der Vorlesung

In den beiden folgenden Aufgaben 21 und 22 befinden wir uns in der Situation von Kapitel 6 der Vorlesung.

21. Sei $\varkappa$ ein m-dimensionales Funktional und $\hat{\varkappa}$ asymptotisch linear für $\varkappa$ in a. Hat $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ stetige partielle Ableitungen in $\varkappa(a)$, dann ist $\varrho(\hat{\varkappa})$ asymptotisch linear für $\varrho(\varkappa)$ in a.

22. Sei P_{na}, $a \in A$, lokal asymptotisch normal in a, $\varkappa : A \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a und $\hat{\varkappa}$ regulär und effizient für $\varkappa$ in a. Hat $\varrho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ stetige partielle Ableitungen in $\varkappa(a)$, dann ist $\varrho(\hat{\varkappa})$ regulär und effizient für $\varrho(\varkappa)$ in a.

23. a) Sei Q Übergangsverteilung und π invariante Verteilung einer Markov-Kette. Setze $\Pi(x, dy) = \pi(dy)$. Zeigen Sie, dass gilt $(Q - \Pi)^t = Q^t - \Pi$.
b) Zeigen Sie: Es existieren $C > 0$ und $\varrho < 1$ mit $\|Q^t - \Pi\|_V \leq C\varrho^t$.

24. *(Maximum-Likelihood-Schätzer für Markov-Ketten)*
Seien $X_0, \dots, X_n$ Beobachtungen einer Markov-Kette mit Übergangsverteilung Q_ϑ, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Für ein festes ϑ sei die Kette positiv Harris-rekurrent, $\vartheta_{nt} = \vartheta + n^{-1/2}t$, die Folge $Q_{\vartheta_{nt}}$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $\dot{\ell}_\vartheta$ und

$$\int \Big(\Big(\frac{d\pi_{\vartheta_{nt}}}{d\pi_\vartheta} \Big)^{1/2} - 1 \Big)^2 d\pi_\vartheta \to 0.$$

Dann ist das Modell lokal asymptotisch normal in ϑ. Berechnen Sie den kanonischen Gradienten von ϑ.

25. Übertragen Sie das Resultat über die asymptotische Linearität von Maximum-Likelihood-Schätzern für i.i.d. Beobachtungen auf Markov-Ketten. Es ergibt sich, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer effizient ist.