Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. Christoph Heuser

Sommersemester 2014

Übungen zur Statistik für Zeitreihen
Serie 9

Abgabe: Dienstag, 24. Juni 2014, vor der Vorlesung

41. a) Sei $a \in (0, \pi)$. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 24 (Herglotz), dass die Funktion γ gegeben durch

$$\gamma(s) = \begin{cases} s^{-1}\sin(as) & , s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \\ a & , s = 0 \end{cases}$$

die Autokovarianzfunktion eines stationären Prozesses (X_t) ist. Welche Spektraldichte besitzt (X_t)?
b) Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion des Prozesses mit Spektraldichte

$$f(u) = \frac{\pi - |u|}{\pi^2} \quad , -\pi \leq u \leq \pi.$$

42. Zeigen Sie, dass durch

$$dZ(u) = dB(u) + dB(-u) + i(dB(-u) - dB(u))$$

ein OIP $(Z(u))$ definiert wird, wobei $2B$ die Brownsche Bewegung auf $[-\pi, \pi]$ ist. Beweisen Sie außerdem, dass (X_t) mit $X_t = \int_{(-\pi,\pi]} e^{itu} dZ(u)$ ein weißes Rauschen mit Mittelwert 0 und Varianz 1 ist.

43. Sei Z ein OIP mit Verteilungsfunktion F, und sei $\psi \in L_2(F)$.
a) Zeigen Sie, dass

$$W(v) = \int_{(-\pi,v]} \psi(u) dZ(u) \quad , -\pi \leq v \leq \pi,$$

ein OIP mit Verteilungsfunktion

$$G(v) = \int_{(-\pi,v]} |\psi(u)|^2 dF(u).$$

b) Ist $g \in L_2(G)$, so ist $g\psi \in L_2(F)$ und

$$\int_{(-\pi,\pi]} g(u) dW(u) = \int_{(-\pi,\pi]} g(u)\psi(u) dZ(u).$$

44. Der Prozess (X_t) besitze die Spektraldarstellung $X_t = \int_{(-\pi,\pi]} e^{itu} dZ(u)$ mit einem OIP $(Z(u))$ und zugehöriger Verteilungsfunktion F. Ferner gelte $Y_t - \varphi Y_{t-1} = X_t$ mit $\varphi \in (-1,1)$. Finden Sie eine Funktion ψ, so dass gilt

$$Y_t = \int_{(-\pi,\pi]} e^{itu} \psi(u) dZ(u).$$

Schreiben Sie dann $E[Y_{t+h} \bar{X}_t]$ als Integral bezüglich F. Berechnen Sie das zuletzt erhaltene Integral für $F(u) = \sigma^2(u+\pi)/(2\pi)$, $-\pi \leq u \leq \pi$.

45. Sei (X_t) reellwertig und schwach stationär mit Mittelwert μ. Setze

$$\mathcal{M}_n = \mathrm{sp}(X_n, \ldots, X_1, 1), \quad \mathcal{N}_n = \mathrm{sp}(X_n - \mu, \ldots, X_1 - \mu).$$

Dann gilt

$$P_{\mathcal{M}_n} X_{n+m} = \mu + P_{\mathcal{N}_n}(X_{n+m} - \mu).$$