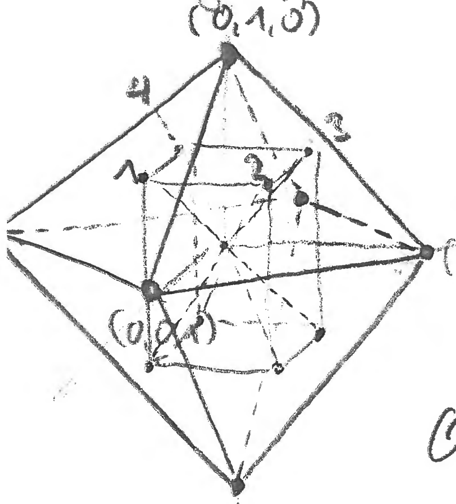
# Tutorium #1: Präsentationen von Gruppen

7.11.2014

① Drehgruppe des Oktaeders




Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Oktaeder.

Sei $\mathcal{O} := \{ g \in SO_3(\mathbb{R}) \mid g(Q) = Q \}$

a) Was ist $\mathcal{O}$?

$\mathcal{O} = \underbrace{W}$
Drehgruppe des Würfels,

denn Q ist „dual" zum Würfel, d.h.

$\{ g \in SO_3(\mathbb{R}) \mid g(\text{Würfel}) = \text{Würfel} \} = \mathcal{O}$.

b) Satz: $W \xrightarrow{\sim} \Sigma_4$ beim Drehen

Was wird in Q permutiert? Die Achsen durch MP ggnüberliegender Flächen.

⇒

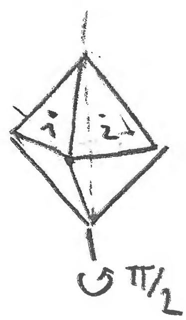
c) $\Sigma_4 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$

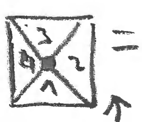
$\underbrace{(1\,2\,3\,4)} \longmapsto$ ?

[Ordnung 4]

90°

(1234) 13



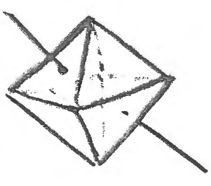



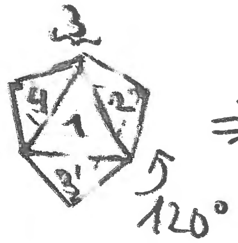

= 90°-Drehung um Achse durch ggnüber. Ecken

⇒ 3 Drehungen x 3 Paare von Ecken

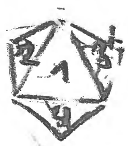
$\underbrace{(4\,3\,2)} \longmapsto$ ?

Ordnung 3






⇒

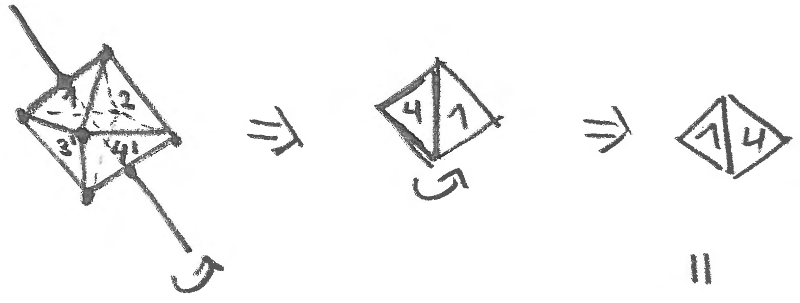



⇒ Drehung um Achse durch MP von Flächen

⇒ 2 Drehungen x 4 Flächenpaare

$\underbrace{(13)(24)}_{\text{Ordnung } 2} \longmapsto ? \quad = (1234)\circ(1234): \quad \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \longmapsto \begin{matrix}2\\3\\4\\1\end{matrix} \longmapsto \begin{matrix}3\\4\\1\\2\end{matrix}$

$\overbrace{(14)}$ $\longmapsto$



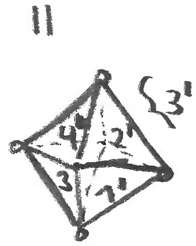
(13)

(12)

(23)

(24)

(34)



$\Rightarrow$ 1 Drehung um Achse durch Kanten-MP

$\Rightarrow$ 1 D $\times$ 6 Kantenpaare.

$\square$

$[\underbrace{1}_{e} + 3\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 6 = 24 = \#\Sigma_4].$

② Beh.:

$\mathcal{G} := \langle x, y \mid x^2 = e,\ y^2 = e,\ xyx = yxy \rangle$

$\overset{(1)}{=} \langle x, y \mid \ '' \ ,\ '' \ ,\ (xy)^3 = e \rangle \xrightarrow[\sim]{(2)} \Sigma_3$

1): $xyx = yxy \iff (xy)^3 = e$

"$\Rightarrow$": $xyxyxy = yxyyxy = yxxy = y^2 = e$

"$\Leftarrow$": $xyxyxy = e \quad | \cdot (yxy)^{-1} \quad \Rightarrow \quad xyx = (yxy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}y^{-1}$
$= yxy$ :]

2) Def. $\varphi: \mathcal{G} \longrightarrow \Sigma_3$ Gruppen-Hom.

$x \longmapsto (12)$

$y \longmapsto (23)$

$[e \longmapsto (1)(2)(3)]$

a) $\varphi$ ist wohldef., d.h. $\varphi$ erhält Relationen

$\varphi(x^2) = \varphi(x)\cdot\varphi(x) = (12)\circ(12) = e$

$\varphi(y^2) = e$ ✓

$$\varphi(xyx) = (12)\circ(23)\circ(12): \quad \overbrace{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \longmapsto \begin{matrix}2\\1\\3\end{matrix} \longmapsto \begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}}^{(132)} \longmapsto \begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix} = (13)$$

$$\varphi(yxy) = (23)\circ(12)\circ(23): \quad \underbrace{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \longmapsto \begin{matrix}1\\3\\2\end{matrix} \longmapsto \begin{matrix}2\\3\\1\end{matrix}}_{(123)} \longmapsto \begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix} = (13)$$

$\Rightarrow \varphi(xyx) = \varphi(yxy)$.

b) $\varphi$ surjektiv: $\quad \Sigma_3 = \{\mathrm{Id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

$$(12) = \varphi(x),\quad (13) = \varphi(xyx),\quad (23) = \varphi(y),\quad (123) = \;? = \varphi(yx),\quad (132) = \varphi(xy).$$

c) $\varphi$ injektiv: Beh.: $\# G = 6$.

Betrachte alle „Wörter" in $G$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & x^2=e & & \\
 & x \arrow[ur] \arrow[dr] & & & x^2yx=yx \\
 & & yx \arrow[r] \arrow[dd] & xyx=yxy \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & & yxyx=y^2xy=xy \\
e \arrow[uuur, "x\cdot"] \arrow[ddr, "y\cdot"'] & & y^2x=x & & \\
 & & xy \arrow[r] \arrow[dr] & x^2y=y & \\
 & y \arrow[ur] \arrow[dr] & & yxy & \\
 & & y^2=e & &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow G = \{e, x, y, yx, xy, xyx\}$. $\square$

Bem. 1: $\quad G \overset{\mathrm{DEF}}{=} \underbrace{F(\{x,y\})}_{\text{freie Gruppe}} \big/ \underbrace{\langle\langle x^2, y^2, (xy)^3 \rangle\rangle}_{\text{Normalteiler.}}$ [siehe VL]

$\boxed{\text{Bem. 2}}$: $\quad \sigma_i = (i, i+1) \qquad |i-j| \geq 2$

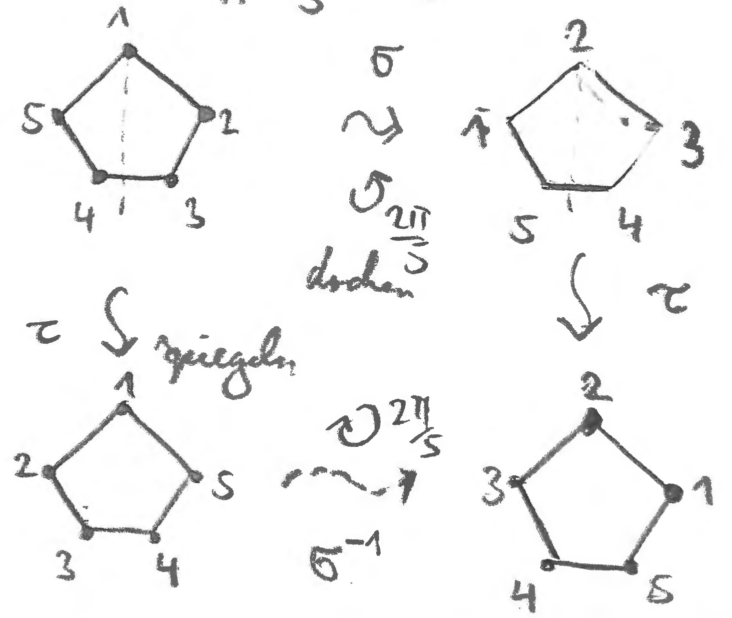


$\Sigma_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i^2 = e,\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \ \dots$

# ④ Diedergruppe

$n = 5$. $\mathbb{D}_5$ = Symmetriegruppe von Fünfeck = 5 Drehungen + 5 Spiegelungen

$\# \mathbb{D}_5 = 10$




Beh.: $\underbrace{\langle \sigma, \tau \mid \sigma^5 = e,\ \tau^2 = e,\ \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle}_{G} \cong \mathbb{D}_5$

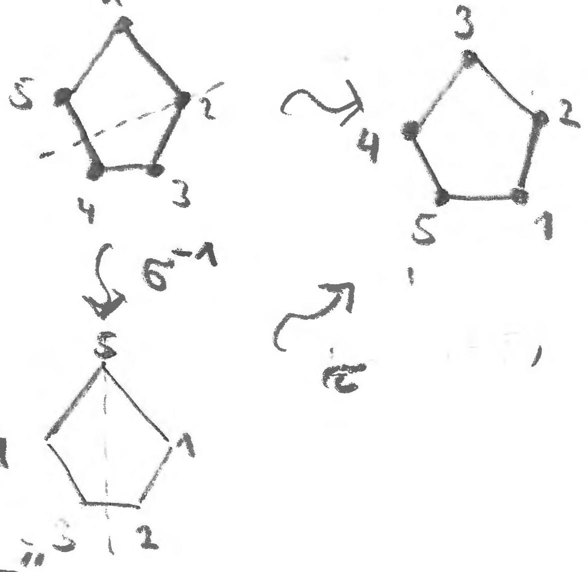
- $\varphi$ wohldef.? ✓
- $\varphi$ surjektiv? ja,

$G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{D}_5 \hookrightarrow \Sigma_5$

$\sigma \longmapsto$ Drehung $\longmapsto (12345)$

$\tau \longmapsto$ Spiegelung oben $\longmapsto (25)(34)$

z.B. Spiegelung „an 2"




$\varphi$ injektiv?

Beh.: $\# G = 10$.

$G = \{ \underbrace{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4}_{\text{Drehungen}}$ „$\sigma^i$"

$\underbrace{\tau,\ \sigma\tau = \tau\sigma^4,\ \sigma^2\tau = \tau\sigma^3,\ \sigma^3\tau = \tau\sigma^2,\ \sigma^4\tau = \tau\sigma}_{\text{Spiegelungen}} \}$ „$\sigma^i\tau$"

- $\tau\sigma^i = \sigma^{-1}\tau\sigma^{i-1} = (\sigma^{-1})^i \tau = \sigma^{-i}\tau$ □

④ Untergruppen von $GL_n(K)$

[Erinnerung]: Elementarmatrizen

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \;\; 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\uparrow j & \end{array} \qquad \begin{array}{l} i \neq j \quad i,j \in \{1,\dots,n\} \\ \lambda \in K \setminus \{0\}. \end{array}$$

$$F_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 \; \lambda \; 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in K \setminus \{0\}$$

$$\begin{array}{lccc}
\text{Satz (LA):} & \langle E_{ij}(\lambda),\, F_i(\lambda) \mid i \neq j,\, \lambda \in K^* \rangle & = & GL_n(K) \\
 & \cup & & \cup \\
 & \mathcal{U}_1 := \langle E_{ij}(\lambda) \mid i \neq j \rangle & \overset{(2)}{=} & ? \\
 & \cup & & \cup \\
 & \mathcal{U} := \langle E_{ij}(\lambda) \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle & \overset{(1)}{=} & ?
\end{array}$$

Was sind $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ konkret?

1) Beh.: $\mathcal{U}_2 = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & * & & * \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{strikte obere} \\ \text{Dreiecksmatrizen}}} \Big\} = \{ A \in SL_n(K) \mid A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$ mit $a_{ij} = 0 \; \forall i > j$ und $a_{ii} = 1 \}$ $=: H$

Bew.: „$\subseteq$": $E_{ij}(\lambda) \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}_2 \subseteq H$

„$\supseteq$":

Sei $A \in H$. $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ & 1 & a_{23} & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

Idee:
- fasse $E_{ij}(\lambda)$ mit $E_{ij}(\lambda) \in \mathcal{U}$.
  als ST von A auf:
  (oder ZT)

$A \longmapsto A \cdot E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} + \lambda \cdot 1 & a_{13} & \\ & 1 + \lambda \cdot 0 & a_{23} & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

entspricht: addiere $\lambda \cdot$ Spalte 1 zu Spalte 2

- bringe A durch ST mit $E_{ij}(\lambda) \in \mathcal{U}_2$ auf Id.

$\lambda = -a_{12}$ oben $\rightsquigarrow$

$A \cdot E_{12}(-a_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 1 & a_{23} & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \cdot E_{12}(-a_{12}) \cdot E_{13}(-a_{13}) \cdots E_{1n}(-a_{1n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & a_{23} \cdots & x \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists T \in \mathcal{U}_2 : \quad A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id} \quad \Rightarrow A = T^{-1} \in \mathcal{U}$

$\square$

6

2) Beh.: $\mathcal{U}_1 = \langle E_{ij}(\lambda) \mid i \neq j \rangle = SL_n(K)$

„$\subseteq$": $\det E_{ij}(\lambda) = 1$

„$\supseteq$". Sei $A \in SL_n(K)$

$A \longmapsto S \cdot A\, T$ mit $S, T \in \mathcal{U}_1$.

entspricht beliebigen ST und ZT von A

- außer multiplizieren von Z oder S mit $\lambda$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots \overset{-\lambda}{a_{1j}} & \cdots \\ \vdots & \\ a_{i1} & \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

(A) Angenommen $\exists j \leq n$: $a_{1j} \neq 0$

$$\Rightarrow A \cdot E_{ij}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_{1j} \\ & & \\ * & & * \end{pmatrix}$$

mit $\lambda$ so dass $a_{11} - a_{1j}\lambda = 1$

$\left(\lambda = \dfrac{a_{11} - 1}{a_{1j}}\right)$

$\Rightarrow \exists S, T \in \mathcal{U}_1$:

$$S \cdot A \cdot T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

$\det A' = 1$ Induktion $\rightsquigarrow$ $\exists S, T \in \mathcal{U}_1$:

$S \cdot A\, T = \mathrm{Id}$

$\Rightarrow A = S^{-1} T^{-1} \in \mathcal{U}_1$ □

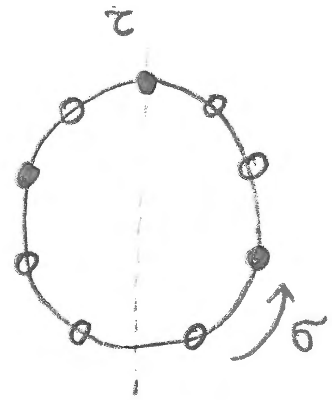
B)
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \vdots & a_{ij} \\ * & \ldots \quad * \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \ldots 0\, a_{ij}\, 0 \ldots 0 \\ \hline \vdots & * \\ * & \end{array}\right)$$

$\exists a_{ij} \neq 0$ mit $j \neq 1$

Tutorium #2:　　　　　　　　　　　　　　　　　　14.11.14

Zählen bis auf Symmetrie

Problem 1: Wieviele Perlenketten mit 3 schwarzen und 6 weißen Perlen gibt es?




Lösung 1: löse zuerst

Problem 0: Wieviele Ketten mit 9 Perlen aus schwarzen oder weißen Perlen?

Ⓐ Math. Form.

Wirkung $G \times M \longrightarrow M$ mit $G$ = Diedergruppe $D_9$

$M$ = Perlenketten $= \{ x_1 x_2 \dots x_9 \mid x_i \in \{s, w\}$ für $i \in \{1, \dots, 9\} \}$

$\Rightarrow |M/G| = \#$ Ketten bis auf Symmetrie

Bahnformel:

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \qquad \chi(g) = |\mathrm{Fix}(g)| = |\{x \in M \mid gx = x\}|$$

Lemma: $g \sim h \Rightarrow \chi(g) = \chi(h)$

② Konjugationsklassen in $G$

$\sigma^i \sim \sigma^{n-i}$

$\tau \sim \sigma^{2i}\tau \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$

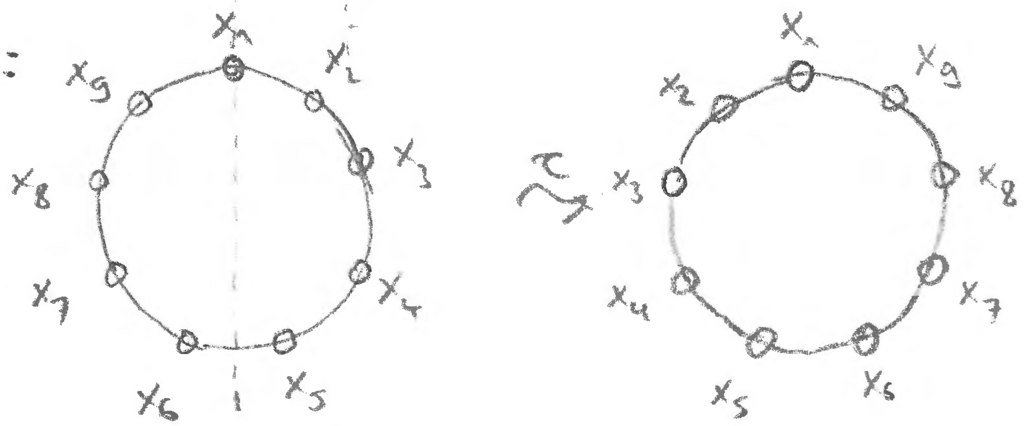
$\Rightarrow D_g = \{ e;\ \underbrace{\sigma \sim \sigma^8}_{\#2};\ \sigma^2 \sim \sigma^7;\ \sigma^3 \sim \sigma^6;\ \sigma^4 \sim \sigma^5;$

$\underbrace{\tau \sim \sigma^2\tau \sim \sigma^4\tau \sim \sigma^6\tau \sim \sigma^8\tau \sim \sigma\tau \sim \sigma^3\tau \sim \sigma^5\tau \sim \sigma^7\tau}_{9 \text{ Elemente}}$

$\Rightarrow |M/G| = \frac{1}{18}\left( \chi(e) + 2\cdot(\chi(\sigma) + \chi(\sigma^2) + \chi(\sigma^3) + \chi(\sigma^4)) + 9\,\chi(\tau)\right)$

③ Fixpunkte

- $\chi(e) = |Fix(e)| = |M| = 2^9$
- $g = \tau$:

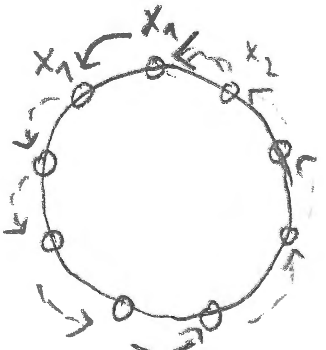



sei $x \in Fix(\tau) \Rightarrow \tau x = x \Rightarrow x_2 = x_9 \quad x_3 = x_8 \quad x_4 = x_7 \quad x_5 = x_6$

$x = x_1 x_2 \dots x_9 \qquad \Rightarrow x = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1$

$\Rightarrow |Fix(\tau)| = 2^5 \qquad x_i \in \{s, w\}$

- $g = \sigma$:




$x \in Fix(\sigma) \Rightarrow x_i = x_{i+1} \quad \forall i$

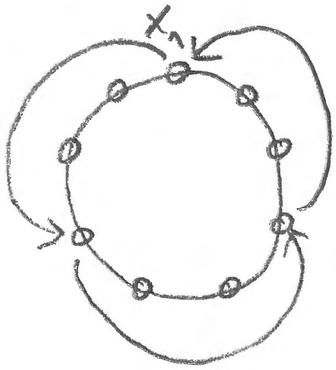
$\Rightarrow \chi(\sigma) = 2.$

$\cdot\, g=\sigma^2$ : $\quad x \in \mathrm{Fix}(\sigma^2) \Rightarrow x_i = x_{i+2} = \dots x_{i+8} = \underbrace{x_{i+10}}_{i+1} = x_{i+3} \dots$

$$\Rightarrow \chi(\sigma^2) = 2$$

$\cdot\, g=\sigma^4 \Rightarrow x_i = x_{i+4j} \quad \forall i,j \Rightarrow \chi(\sigma^4) = 2$

$x \in \mathrm{Fix}(\sigma^3) \Rightarrow x_i = x_{i+3} \quad \forall i$




$\Rightarrow x = x_1 x_2 x_3 \, x_1 x_2 x_3 \, x_1 x_2 x_3$

$\Rightarrow \chi(\sigma^3) = 2^3$

$$\Rightarrow |M/G| = \frac{1}{18}\Big(\underbrace{2^9 + 2(2+2+2^3+2) + 9\cdot 2^5}_{\text{muss durch 18 teilbar sein!}}\Big) = \dots = \frac{2}{9}\cdot 207 \stackrel{!}{=} 46.$$

zurück zu Problem 1:
3 schwarze und 6 weiße Perlen.

(A) $\quad G \times L \longrightarrow L$, $\quad G = D_9$, $\quad L = \{x_1 x_2 \dots x_9 \mid x_i \in \{s,w\}$ und genau drei Mal schwarz$\} \subset M$.

(B) wie oben

(C) $\cdot\; \chi(e) = |L| = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 3\cdot 4\cdot 7$

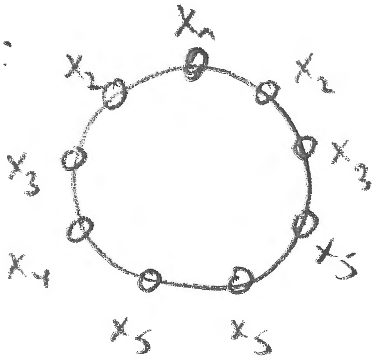
$\chi(\sigma)$: $\quad x \in \mathrm{Fix}(\sigma) \Rightarrow x$ einfarbig $\Rightarrow x \notin L \Rightarrow \chi(\sigma) = 0$

analog für $g = \sigma^2$ oder $\sigma^4$.

· $g = \sigma^3$: $\quad x = x_1 x_2 x_3 \, x_1 x_2 x_3 \, x_1 x_2 x_3 \in L$

$$\Leftrightarrow \exists! \, i \in \{1,2,3\} : \quad x_i = s \quad \Rightarrow \chi(\sigma) = 3$$

· $g = \tau$:




· falls $x_1 = w \Rightarrow x \notin L$

$\Rightarrow x_1 = s$

$x = s\, x_2 x_3 x_4 x_5 x_5 x_4 x_3 x_2$

mit 2 weiteren schwarz

$$\Rightarrow \chi(\tau) = 4$$

$$\Rightarrow |L/G| = \frac{1}{18} \left( \chi(e) + 2 \cdot \chi(\sigma^3) + 9\, \chi(\tau) \right)$$

$$= \frac{1}{18} (3 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 9 \cdot 4) = \frac{6}{18} (14 + 1 + 6) = \frac{21}{3} = 7.$$

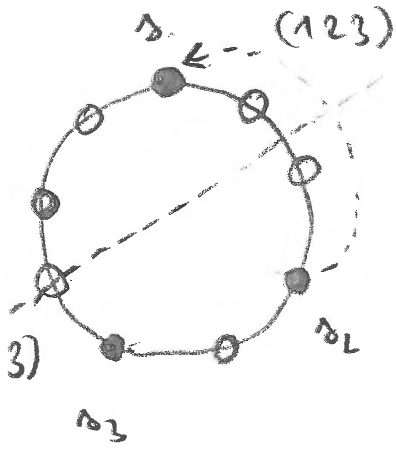
Lösung 2:

Ⓐ math Form.

· eine Kette mit $3 \times s$ und $6 \times w$ ist eindeutig festgelegt durch $(d_1, d_2, d_3)$.

$d_1$ = # schwarze Perlen zw. 1. weißer Perle und 2. weißer Perle
$d_2$ = " 2 " 3 "
$d_3$ = " 3 " 1 "

(im Uhrzeiger-Sinn)




$$\overset{d_1\, d_2\, d_3}{=} (2, 1, 3)$$

$$\rightsquigarrow K = \{ (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{N}_0^3 \mid d_1 + d_2 + d_3 = 6 \}$$

$\Rightarrow \quad \Sigma_3 \times K \longrightarrow K$

z.B. $(123)\cdot(d_1 d_2 d_3) = (d_2 d_3 d_1)$ „Drehung"

$(23)\cdot(d_1 d_2 d_3) = (d_1 d_3 d_2)$ „Spiegelung".

(b) $\Sigma_3 = \{ e, \ (12) \sim (23) \sim (13), \ (123) \sim (321) \} \cong D_3$

$\tau \quad \sigma\tau \quad \sigma^2\tau \quad \sigma^2 \quad \sigma$

(c)

- $g = e$: $\chi(e) = |K| = \sum_{i=1}^{7} i = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$

- $g = \tau$: $(d_1 d_2 d_3) = (d_2 d_1 d_3) \Rightarrow d = (d_1 d_1 d_3)$

$\Rightarrow d = 006, \ 114, \ 222, \text{ oder } 330$

$\Rightarrow \chi(\tau) = 4.$

- $g = \sigma^2$: $(d_1 d_2 d_3) = (d_2 d_3 d_1) \Rightarrow d = (222) \Rightarrow \chi(\sigma^2) = 1$

$\Rightarrow |K/\Sigma_3| = \frac{1}{6}\left(\chi(e) + 2\cdot\chi(\sigma^2) + 3\cdot\chi(\tau)\right)$

$= \frac{1}{6}(28 + 2 + 3\cdot 4)$

<u>Lösung</u> 3:

Kette $= (d_1, d_2, d_3)$ $d_1$ = kleinster Abstand zw. 2 weißen Perlen

$d_2$ = zweit-kleinster "

$d_3$ = dritt-kleinster "

$\Rightarrow \mathcal{J} = \{ (d_1, d_2, d_3) \mid d_1 \leq d_2 \leq d_3, \ d_1 + d_2 + d_3 = 6 \}$

$= \{ 006, 015, 024, 033, 114, 123, 222 \}$

$\Rightarrow |\mathcal{J}| = 7.$

Bem.:

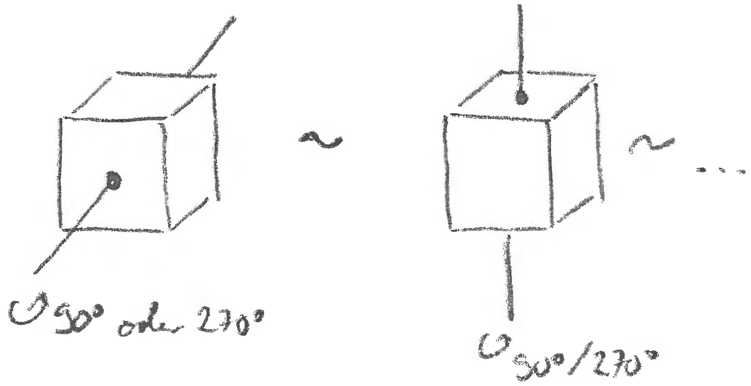
Geom. Bsp. für konjugierte Elemente

Satz: $g, h \in \Sigma_n$. $g \sim h \Leftrightarrow \mathrm{typ}(g) = \mathrm{typ}(h)$

$\Leftrightarrow$ g und h haben gleiche Anzahl von Zykeln der Länge $\ell$ für jedes $\ell \in \{0, \dots, n\}$.

Bsp.: $\Sigma_4 \times W \longrightarrow W$

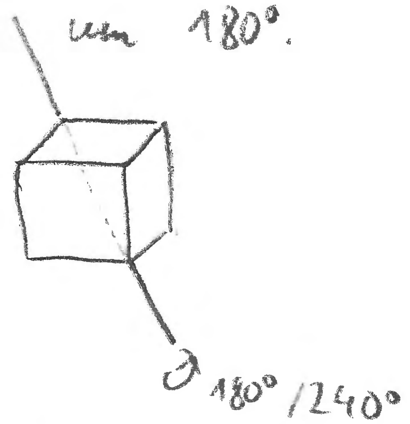
$\underbrace{(1234)}_{\text{4-Zykel}} \sim (1342) \sim \dots \quad \hat{=}$



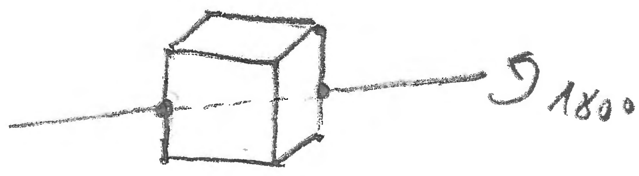

$(1234) \circ (1234) = \underbrace{(13)(24)}_{\text{zwei 2-Zykel}} \sim (14)(23) \dots$

$\hat{=}$ Drehungen wie oben um 180°.

$\underbrace{(123)}_{\text{3-Zykel}} \sim (134) \sim \dots \quad \hat{=}$




$\underbrace{(12)}_{\text{ein 2-Zykel}} \sim (13) \sim (24) \sim \dots$



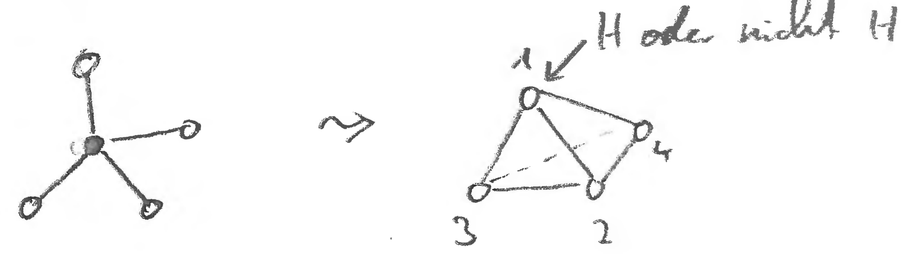

$\Rightarrow$ Drehungen um Achsen durch Paare von „Dingen vom gleichen Typ" oder gleichen Ordnung sind konjugiert.

= Flächen / Kanten / E...

⑥

Problem:

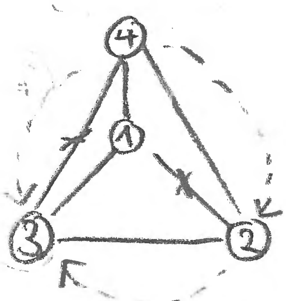
An jeder Ecke eines Tetraeder-Moleküls ist ein oder kein Wasserstoff-Atom.
Wieviel Moleküle gibt es?



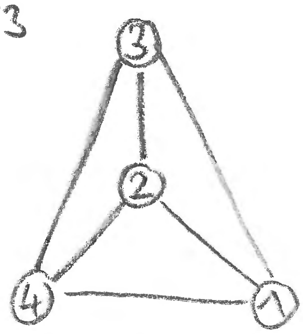

(A) math. Form.

$$A_4 \times M \longrightarrow M = \{x_1 x_2 x_3 x_4 \mid x_i = H \text{ oder } 0\}$$

$$\underset{\tau}{(12)(34)} \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_1 x_4 x_3$$



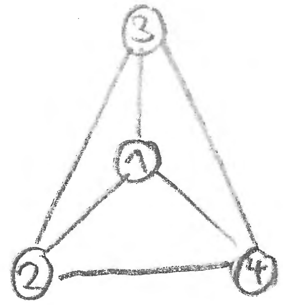

$\overset{\tau}{\rightsquigarrow}$ (12)(34)




$x_2 x_1 x_4 x_3$

$x_1 x_2 x_3 x_4$

$\overset{\sigma}{\rightsquigarrow}$ (234)




$x_1 x_3 x_4 x_2$ !

(B)

$$A_4 = \{ e,\ \overset{\tau}{(12)(34)} \sim (13)(24) \sim (14)(23),$$
$$(123) \sim (134) \sim \overset{\sigma^2}{(432)} \sim (421),$$
$$(321) \sim (431) \sim \underset{\sigma}{(234)} \sim (124) \}$$

(c)

$\cdot\ \chi(e) = |M| = 2^4$

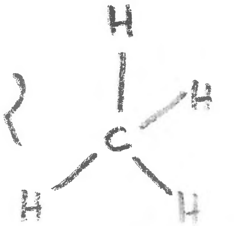
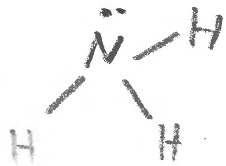
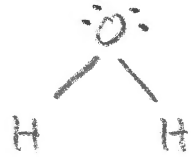
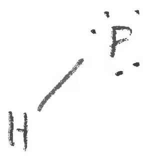
$\cdot\ x \in \mathrm{Fix}(\tau) \Rightarrow x = x_1 x_1 x_2 x_2 \Rightarrow \chi(\tau) = 2^2$

$x \in \mathrm{Fix}(\sigma) \Rightarrow x = x_1 x_2 x_2 x_2 \Rightarrow \chi(\sigma) = 2^2$

$x \in \mathrm{Fix}(\sigma^2) \Rightarrow x = x_1 x_2 x_2 x_2$ 〃

$$\Rightarrow |M/A_4| = \frac{1}{12}\left(16 + 3\chi(\tau) + 4\left(\underbrace{\chi(\sigma)}_{2} + \underbrace{\chi(\sigma^2)}_{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{12}(16 + 3\cdot 4 + 4\cdot 8) = \frac{1}{3}(4+3+8) = 5$$

Bem.:

$M/A_4 = \{$  ,  ,  ,  Ne $\}$

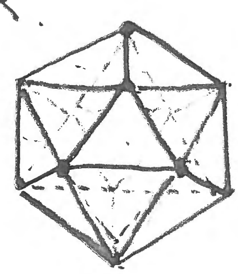
| $CH_4$ | $NH_3$ | $H_2O$ | $HF$ | |
|---|---|---|---|---|
| [C 6 wertig] | [N ⇝ 7] | [O ⇝ 8] | [F ⇝ 9] | [10] |
| $-2-4$ | $-2-3$ | $-2-2$ | $-2-1$ | $=2\cdot 8$ |
| $=0$ | $=\cancel{8}2$ | $=4$ | $=6$ | |

Tutorium #3: 21.11.14.

Gruppen-Aktionen u.v.m.

① Ordnung der Ikosaedergruppe

$I \subset \mathbb{R}^3$.



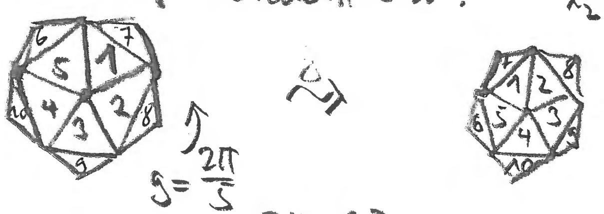
$G$ = Drehgruppe von $I$ $\left\{\begin{array}{l} 20 \text{ Flächen} \\ 30 \text{ Kanten} \\ 12 \text{ Ecken} \end{array}\right.$

Frage: was ist $|G|$?

Ansatz: $G \times M \longrightarrow M = \{20 \text{ Flächen von } I\}$ Gruppen-Aktion

$x_1$ = Fläche 1 „oben".

z.B.




[4·6]

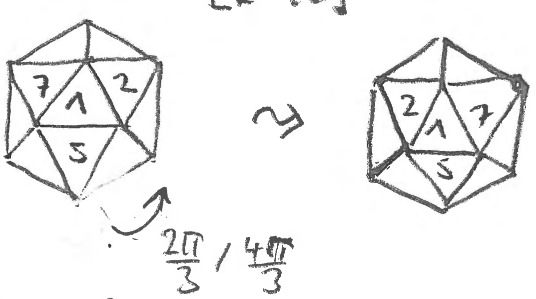
Bahnformel 1: sei $x \in M$ $\Rightarrow$ $|B_x| = \frac{|G|}{|G_x|}$ $\Rightarrow$ $|G| = |G_x| \cdot |B_x|$.

$\rightsquigarrow$ berechne $|G_x|$, $|B_x|$.

a) $G_x$ = Stab. von $x = \{g \in G \mid gx = x\}$. [eine UG]

sei $g \in G_{x_1}$ mit $g \neq e$ $\Rightarrow$ $g x_1 = x_1$ $\Rightarrow$ Drehachse von $g$ geht durch MP von $x_1$ und MP der Fläche gegenüber

[2·10]



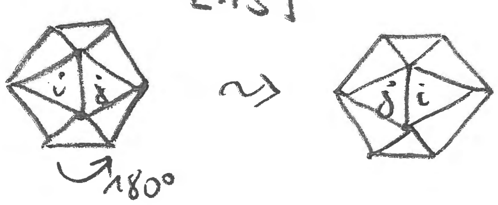

$\Rightarrow$ $g = \frac{2\pi}{3}$ oder $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ oder $g = e$
Drehung

$\Rightarrow$ $|G_{x_1}| = 3$.

b) Beh: $|B_{x_1}| = 20$ $\Leftrightarrow$ $B_{x_1} = \{g x_1 \mid g \in G\} = M$

Betrachte Drehung

[15]




$\Rightarrow$ $G$ kann benachbarte Flächen tauschen

$\Rightarrow$ beliebige Fläche oben

$\Rightarrow$ $G$ wirkt transitiv $\Rightarrow$ $B_x = M$

$\boxed{\Rightarrow |G| = 60}$

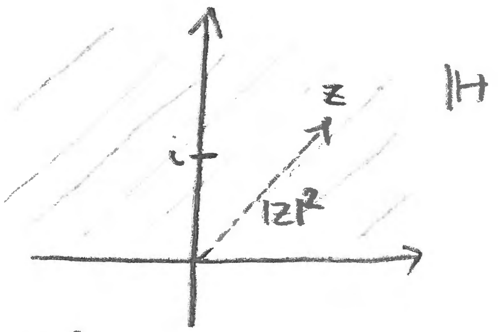
Bem.: $G \cong A_5$

② Gebrochen-lineare Transformationen

$\mathcal{G} = SL(2,\mathbb{R}) \qquad \mathcal{G} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} = \{ \underbrace{x + iy}_{z} \mid x \in \mathbb{R}, y > 0 \} \subset \mathbb{C}$

$\overset{\Psi}{g} \qquad g * z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z = \dfrac{az+b}{cz+d}$

mit $ad - bc = 1$




Frage 1: ist das eine Gruppenwirkung?

a) Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{H}$ Beh.: $g * z \in \mathbb{H}$.

also $\operatorname{Im}(g*z) > 0$

$g * z = \dfrac{az+b}{cz+d} =: \dfrac{p}{q}$

$\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{\bar{q}}{\bar{q}} = \dfrac{p \cdot \bar{q}}{\underbrace{|q|^2}_{\in \mathbb{R}^+}} \qquad \operatorname{Im}\left(\dfrac{p}{q}\right) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(p \cdot \bar{q}) > 0$

$\operatorname{Im}(p \cdot \bar{q}) = \operatorname{Im}((az+b)(c\bar{z}+d)) = \operatorname{Im}(ac\,|z|^2 + bc \cdot \bar{z} + ad \cdot z + bd)$

sei $z = x + iy$ mit $y > 0$ $\qquad = bc \cdot (-y) + ad \cdot y = (ad - bc) \cdot y$

$= y$

$y > 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(g * z) > 0.$

b) $e * z = z$ ? $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * z = \dfrac{1 \cdot z + 0}{0z + 1} = z$ ✓

c) Beh.: $g_2 * (g_1 * z) = (g_2 \cdot g_1) * z \quad \forall \; g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$.

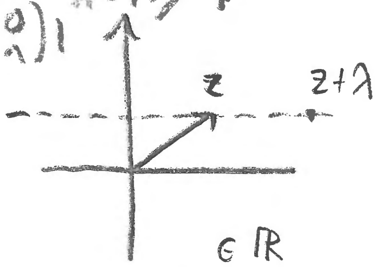
$\forall z \in \mathbb{H}$

$g_2 * (g_1 * z) = g_2 * \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = \dfrac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \dfrac{a_2 a_1 z + a_2 b_1 + b_2 c_1 z + d_1 b_2}{c_2 a_1 z + b_1 c_2 + d_2 c_1 z + d_2 d_1}$

$(g_2 \cdot g_1) * z = \left( \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \right) * z = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 a_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix} * z$ //

Frage 2: Ist Wirkung transitiv?

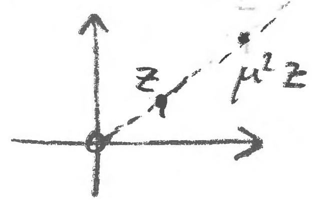
$\Rightarrow$ Betrachte „elementare" $g \in G = \langle \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \rangle$ $\mathbb{H}$




- $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * z = \dfrac{1 \cdot z + \lambda}{0 \cdot z + 1} = z + \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} * z = \dfrac{z + 0}{\lambda \cdot z + 1} = \dfrac{z}{\lambda z + 1} = \dfrac{z(\lambda \bar{z} + 1)}{|\lambda z + 1|^2} = \dfrac{\overbrace{\lambda |z|^2}^{\in \mathbb{R}}}{|\lambda z + 1|^2} + \underbrace{\dfrac{1}{|\lambda z + 1|^2}}_{\in \mathbb{R}^+} \cdot z$

- $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix} * z = \dfrac{\mu z + 0}{0 \cdot z + 1/\mu} = \underset{\in \mathbb{R}^+}{\mu^2} z$




Beh.: $B_i = \mathbb{H}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix} * i = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu^2 i = \mu^2 i + \lambda$

sei $z = x + iy \in \mathbb{H}$ wähle $\lambda = x$ $\mu = \sqrt{y}$. ofen.

$\Rightarrow B_i = \mathbb{H}$

$\Rightarrow B_z = \mathbb{H} \quad \forall z \in \mathbb{H}$.

Frage 3: was ist $G_i$?

$G_i = \{ g \in G \mid g * i = i \}$. $\quad g * i = \dfrac{ai + b}{ci + d} = i$

$\Leftrightarrow ai + b = -c + id \Leftrightarrow a = d \quad b = -c$

$\Rightarrow g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$

$\Rightarrow G_i = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid \underset{a, b \in [-1,1]}{a^2 + b^2 = 1} \} = \{ \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \mid \vartheta \in [0, 2\pi] \} = SO(2)$

$\boxed{\text{Folgerung}}$: Sei $g \in SL(2, \mathbb{R})$

$\Rightarrow g * i \in \mathbb{H} \Rightarrow g * i =: x + iy$ mit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}}_{=: a} * i$

$\Rightarrow g * i = (n \cdot a) * i$

$\Rightarrow a^{-1} n^{-1} g * i = i \Rightarrow a^{-1} n^{-1} g \in G_i = SO(2)$

$\Rightarrow \exists k \in SO(2): \ a^{-1}n^{-1}g = k. \quad \Rightarrow \quad g = nak.$

$\Rightarrow \forall g \in SL(2,\mathbb{R}) \ \exists n \in \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\}}^{N} \ \exists a \in \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}^*\right\}}_{A}$ [oder $\lambda \in \mathbb{R}^+$]

$\exists k \in \underbrace{SO(2)}_{K}: \quad g = nak$

„$G = NAK$" [Iwasawa-Zerlegung].

$= KAN$

Bem.: $\cdot \ SL(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

- nicht transitiv,

$\cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * z = z \quad \forall z \in \mathbb{H}.$

③ Normalisator.

Def.: $G$ Gruppe, $H \subset G$ Untergruppe

$N_G(H) := \{ g \in G \mid gH = Hg \}$

oder

$gHg^{-1} = H$

Aufg.: $G = \Sigma_4 \supset H = \langle (12) \rangle = \{ e, (12) \}$

Was ist $\underbrace{N_G(H)}_{=: N}$ ?

Sei $g \in G$. $g \in N \Leftrightarrow \forall h \in H \; \exists \tilde{h} \in H : \; gh = \tilde{h} g$

oder $ghg^{-1} = \tilde{h}$

in diesem Fall: $h \sim \tilde{h}$

· falls $h = e$: $\tilde{h} = e$ $\qquad g \cdot e g^{-1} = e \quad \forall g \in G$

· sei $h = (12)$: $\tilde{h} = (12)$

sei $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \in N \Rightarrow g(12) = (12) \cdot g$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \xmapsto{(12)} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \xmapsto{g} \begin{matrix} b \\ a \\ c \\ d \end{matrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \xmapsto{g} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \xmapsto{(12)} \begin{matrix} b \\ a \\ c \\ d \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow [(a=1, b=2)$ oder $(a=2, b=1)]$

und

$[(c=3, d=4)$ oder $(c=4, d=3)]$

$\Leftrightarrow g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow g \in \underbrace{\{ e, (12), (34), (12)(34) \}}_{N}$

Bem.:

$\underbrace{N_G(H)}_{N} \subset G$ Untergruppe. Insbesondere:

- $|N|$ teilt $|G|$
- $g \in N \Leftrightarrow g^{-1} \in N$
- $g \in N \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} g^i \in N \quad \forall i \geq 2$

## 7) Automorphismen

$\varphi \in Aut(G) \Leftrightarrow \varphi: G \longrightarrow G$ Gruppen-Hom. & bijektiv

Bsp.: $G = GL_n(K)$

1) Konjugation: Sei $S \in GL_n(K)$

$$Ad_S: G \longrightarrow G, \quad A \longmapsto S \cdot A \cdot S^{-1}$$

Beh.: $Ad_S \in Aut(G) \ \forall S \in G$.

- $Ad_S$ Gruppen-Hom.: $Ad_S(A \cdot B) = S \cdot A \cdot B\, S^{-1} = S\, A \cdot S^{-1} \cdot S \cdot B \cdot S^{-1}$
$= Ad_S(A)\, Ad_S(B)$

$Ad_S(E) = S \cdot S^{-1} = E$

- $Ad_S$ injektiv: sei $A \in G$ mit $Ad_S(A) = S \cdot A \cdot S^{-1} = E \quad | \cdot S$
$\Rightarrow S \cdot A = S \quad | S^{-1} \cdot \quad \Rightarrow A = E$

- $Ad_S$ surjektiv: sei $B \in G$ wollen $A \in G$ mit $\underset{\underset{S \cdot A \cdot S^{-1}}{\parallel}}{Ad_S(A)} = B$

wähle $A = S^{-1} \cdot B \cdot S$.

$\varphi^*: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$

$A \longmapsto (A^{-1})^{tr} = (A^{tr})^{-1}$

Beh.: $\varphi^* \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$

a). $\varphi^*(E) = E$

$\varphi^*(AB) = ((AB)^{-1})^{tr} = (B^{-1}A^{-1})^{tr} = (A^{-1})^{tr} \cdot (B^{-1})^{tr} = \varphi^*(A) \cdot \varphi^*(B)$

b) $(\varphi^*)^2 = id$

Beh.: $\psi^2 = id \Rightarrow \psi$ bijektiv

$\psi: M \longrightarrow M$

- $\psi$ injektiv: $\psi(x_1) = \psi(x_2) \Rightarrow$

  $x_1 = \psi^2(x_1) = \psi^2(x_2) = x_2$

- $\psi$ surjektiv:

  sei $y \in M \Rightarrow \psi^2(y) = y$

  $\psi^2(y) = \psi(\underbrace{\psi(y)}_{x \in M})$

...

28.11.2014

# Tutorium #4:

## Sylow-Untergruppen

1) <u>Sylow-Sätze</u>

$G$ endlich. Sei $|G| = p^k \cdot m$ mit $p$ prim und $ggT(p,m) = 1$

Def.: Eine Untergruppe $H \subset G$ ist eine <u>p-Sylow-UG</u>

$\Leftrightarrow \quad |H| = p^k$

Sylow-Sätze: $G$ wie oben, $n_p$ = Anzahl von p-Sylow-UG von $G$.

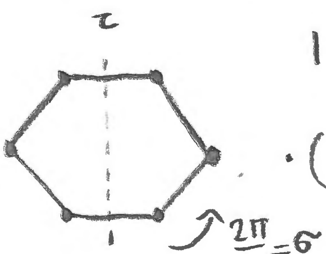
1. $n_p \geq 1$
2. $H, H'$ p-Sylow-UG von $G \Rightarrow \exists g \in G: \ gHg^{-1} = H'$

$\Rightarrow H \cong H'$

3. $\begin{cases} n_p \equiv 1 \mod p \\ n_p \mid m \end{cases}$

3.' $n_p = \dfrac{|G|}{|N_G(H)|}$ für beliebige p-Sylow-UG $H$.

2) Sylow-UG von $\mathbb{D}_6$




$|\mathbb{D}_6| = 12 = 2^2 \cdot 3$

$\cdot$ ($n_p \geq 1$ für $p = 2$ oder $3$)

a) $p = 3$: S3: $\begin{cases} n_3 \equiv 1 \mod 3 \\ n_3 \mid \underbrace{4}_{m} \end{cases} \Rightarrow n_3 \in \{1, 4\}$.

$$\mathbb{D}_6 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \overbrace{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^5}^{[\text{Spiegelungen}]}\}$$

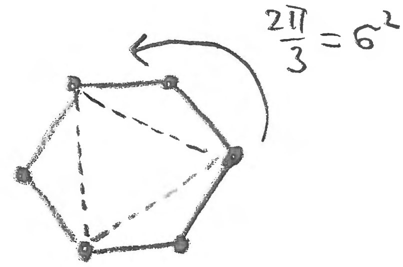
$o(g)$ 1 6 3 2 3 6 2 2 ... 2

$$= \langle \sigma, \tau \mid \sigma^6 = e, \tau^2 = e, \tau\sigma^i = \sigma^{-i}\tau \rangle$$

Sei $H \subset \mathbb{D}_6$ mit $|H| = 3 \Rightarrow H \cong \mathbb{Z}_3 \Rightarrow \forall h \in H, h \neq e: \ ord(h) = 3$.

$\Rightarrow H = \{e, \sigma^2, \sigma^4\} \Rightarrow n_3 = 1$.

geometrisch.




H = Drehgruppe eines gleichseitigen Dreiecks im 6-Eck.
[ohne Spiegelungen].

3) $p = 2$: $\quad 12 = 2^2 \cdot \underbrace{3}_{m}$

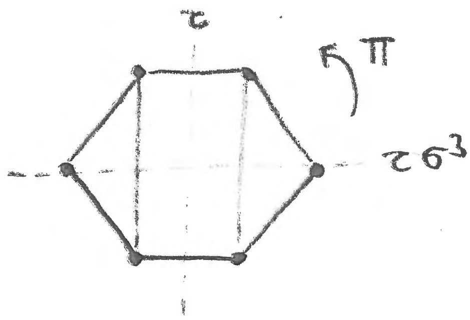
S3: $\begin{cases} n_2 \equiv 1 \mod 2 \\ n_2 \mid 3 \end{cases} \quad \Rightarrow n_2 \in \{1, 3\}.$

$\rightsquigarrow$ suche $H \subset \mathbb{D}_6$ mit $|H| = 4$. [$\Rightarrow H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ oder $H \cong \mathbb{Z}_4$]

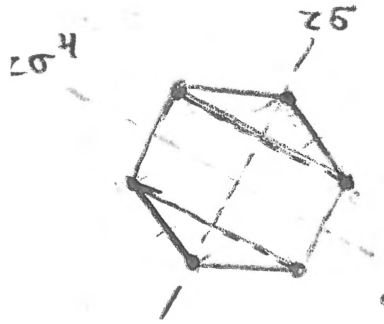
$\Rightarrow \forall h \in H: \ \mathrm{ord}(h) \in \{1, 2, 4\}$

z.B. $\quad H = \langle \sigma^3, \tau \rangle = \{e, \sigma^3, \tau, \sigma^3\tau = \tau\sigma^3\}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ [$a \quad b \quad ab = ba$]
= Symmetrien eines Rechtecks im 6-Eck.

geom.:




[ist H die einzige 2-Sylow-UG?]




$H' = \langle \sigma^3, \tau\sigma \rangle = \{e, \sigma^3, \tau\sigma, \tau\sigma^4 = \sigma^3\tau\sigma\}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ [$a \quad b \quad ab = ba$]

$\Rightarrow n_2 \geq 2 \quad \Rightarrow n_2 = 3$

$\rightsquigarrow H'' = \{e, \sigma^3, \tau\sigma^2, \tau\sigma^5 = \sigma\tau\}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ [$a \quad b \quad ba = ab$]

Bem.: S2): $\exists\, g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{D}_6$ : $\quad g_1 H g_1^{-1} = H' \quad g_2 H' g_2^{-1} = H''$

Was sind $g_1, g_2, g_3$? $\quad\quad g_3 H g_3^{-1} = H''$

$g_3 = g_2 \cdot g_1 \quad\quad$ Beh.: $g_1 = \sigma$: $\quad \sigma(\tau)\sigma^5 = \tau\sigma^4 \quad \Rightarrow \sigma H \sigma^{-1} = H'$

[Drehung um $\frac{2\pi}{6}$] $\quad \sigma(\sigma^3\tau)\sigma^5 = \tau\sigma^7 = \tau\sigma \quad\quad$ [...] ?

$\sigma\,\sigma^3\sigma^5 = \sigma^3$

$g_2 = \sigma$: $\quad \sigma(\tau\sigma)\sigma^5 = \sigma\tau = \tau\sigma^5$

$\sigma(\tau\sigma^4)\sigma^5 = \tau\sigma^8 = \tau\sigma^2 \in H'' \Rightarrow \sigma H'\sigma = H''$ ]

Bem.: $H \cong H' \cong H'' \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3):

Satz: $|G| = p^2 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ oder $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$

Warum ist z.B. $\mathbb{Z}_{25} \not\cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ ?

Sei $\varphi: \mathbb{Z}_{25} \longrightarrow \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ Gruppen-Hom.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{25} & & \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \langle g \mid g^{25} = e \rangle & & \langle h_1 \mid h_1^5 = e \rangle \times \langle h_2 \mid h_2^5 = e \rangle \end{array}$$

Sei $\varphi(g) = (h_1^i, h_2^j)$

$\Rightarrow \quad \varphi(g)^5 = \varphi(g^5) = (h_1^i, h_2^j)^5 = (h_1^{5i}, h_2^{5j}) = (e, e) = \varphi(e)$

$g^5 \neq e \quad \Rightarrow \quad \varphi$ nicht injektiv.

Lemma: Sei $\varphi: G \xrightarrow{\sim} H$ Gruppen-Hom. $\Rightarrow$ ord $g$ = ord $\varphi(g)$ $\forall g \in G$.

[allgemeiner].

Bem.: $\mathbb{Z}_{51} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{17}$ [siehe VL].

4) Zum Normalisator

$H \subset G$ UG. $\quad N_G(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\}$.

Es gilt: a) $H \lhd \underbrace{N_G(H)}_{\text{UG von } G} \subset G$

b) $N_G(H) = G \Leftrightarrow gH = Hg$ für <u>alle</u> $g \in G \Leftrightarrow H \lhd G$

[H normal in G]

c) $N_G(H)$ = größte UG von $G$, in der $H$ ein Normalteiler ist

Aufg.:

Sei $|G| = 200 = 5^2 \cdot 8$.

Bch.: jede 5-Sylow-UG von $G$ ist normal.

$$S3) \begin{cases} n_5 \equiv 1 \bmod 5 \\ n_5 \mid 8 \end{cases} \Rightarrow n_5 = 1.$$

Bem.: $|G| = p^k \cdot m$ wie oben.

$n_p = 1 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{|G|}{|N_G(H)|}$ für eine beliebige p-Sylow-UG H in $G$

$\Leftrightarrow |G| = |N_G(H)| \quad \dots \quad \Leftrightarrow G = N_G(H) \quad \dots$

$\Leftrightarrow H \trianglelefteq G$ für „jede" p-Sylow-UG H von $G$.
(die einzige)

$\Rightarrow$ Bch oben.

⑤ Bestimme Anzahl der p-Sylow-UG von $A_5$

$|A_5| = 60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$

$\rightsquigarrow$ was ist $n_p$ für $p \in \{2,3,5\}$?

<u>Ansatz</u>: · verwende S3 $\rightsquigarrow$ Einschränkungen an $n_p$

· finde genügend viele p-Sylow-UG so dass $n_p$ eindeutig

oder

· berechne $|N_G(H)|$ für eine p-Sylow-UG H

$$\underset{(S3')}{\Rightarrow} n_p = \frac{|G|}{|N_G(H)|}$$

2) $p=3$: $\quad 60 = 3\cdot 20$

S3) $\begin{cases} n_3 \equiv 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 20 \end{cases} \Rightarrow n_3 \in \{1, \cancel{2}, 4, \cancel{5}, 10, \cancel{20}\}$

$H \subset A_5$ mit $|H| = 3 \rightsquigarrow$ suche $g \in A_5$ mit $\operatorname{ord}(g) = 3$.

z.B. $g = (1\,2\,3) = (3\,2)\circ(2\,1) \in A_5 \Rightarrow \langle (1\,2\,3) \rangle$ eine 3-Sylow-UG

$$\langle (1\,2\,3)\rangle = \{e, (1\,2\,3), (3\,2\,1)\}$$

oder $(1\,2\,4)$

$(1\,2\,5)$

$(1\,3\,4)$

$(1\,3\,5)$

$\Rightarrow n_3 \geq 5 \Rightarrow n_3 = 10$.

3) $p=5$: $\quad 60 = 5\cdot 12$

S3) $\begin{cases} n_5 \equiv 1 \mod 5 \\ n_5 \mid 12 \end{cases} \Rightarrow n_5 \in \{1, 6\}$

wähle $g = (1\,2\,3\,4\,5) = (5\,4)\circ(4\,3)\circ(3\,2)\circ(2\,1) \in A_5$

oder $h = (1\,2\,3\,5\,4)$

$\Rightarrow \langle g\rangle, \langle h\rangle$ 5-Sylow-UG und $\langle g\rangle \neq \langle h\rangle \Rightarrow n_5 \geq 2$

$\Rightarrow n_5 = 6$.

c) $p=2$: $\quad 60 = 2^2\cdot 15$

S3) $\begin{cases} n_2 \equiv 1 \mod 2 \\ n_2 \mid 15 \end{cases} \Rightarrow n_2 \in \{1, 3, 5, 15\}$.

suche $H \subset A_5$ mit $|H| = 4 \Rightarrow H \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ oder $\mathbb{Z}_4$

Bem.: $(2\,3\,4\,5) \notin A_5$ [keine geraden Transpositionen].

$(1\,2)$

Betrachte

a) $V_4 \triangleleft A_4 \hookrightarrow A_5$ [Gruppen-Hom.]

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&c&d&5\end{pmatrix}$$

$V_4 = \{ \underset{a}{(12)(34)}, \underset{b}{(13)(24)}, \underset{ab=ba}{(14)(23)}, e\}$ = 2-Sylow-UG in $A_5$

„ohne 5"

$V_4' = \langle (12)(35), (13)(25) \rangle \subset A_5$ „ohne 4"

$V_4'' = \langle (12)(45), (14)(25) \rangle \subset A_5$ „ohne 3"

⋮

$V_4''''$ „ohne 1" $\Rightarrow n_2 \geq 5. \Rightarrow n_2 = 5$ oder $15.$

Ang.: $n_2 = 15 \Leftrightarrow 15 = \dfrac{|A_5|}{|N_{A_5}(V_4)|} \Leftrightarrow |N_{A_5}(V_4)| = 4$

$\Leftrightarrow N_{A_5}(V_4) = V_4$

[Normalisator minimal].

aber $N_{A_5}(V_4) \supset N_{A_4}(V_4) = A_4$ ↯

$\Rightarrow n_2 = 5$

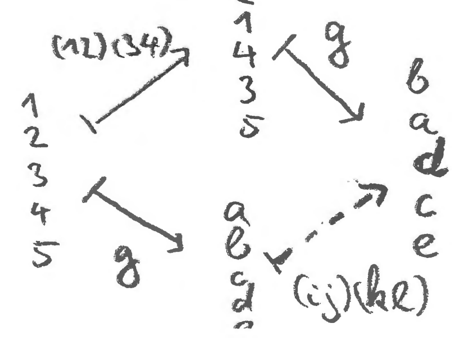
b) alternativ: Beh.: $N_{A_5}(V_4) = A_4$

dann wäre $n_2 = \dfrac{60}{12} = 5.$

$N_{A_5}(V_4) \supset A_4$ ✓ Beh.: $N_{A_5}(V_4) \subset A_4$

Sei $g \in N_{A_5}(V_4)$ $g = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&c&d&e\end{pmatrix} \Rightarrow g \cdot (12)(34) = \overset{V_4 \ni}{(ij)(kl)} \cdot g$

mit $i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}$

$\Rightarrow$ 


$\Rightarrow (ij)(kl) = (ab)(cd)$ oder $(cd)(ab)$

$\Rightarrow a,b,c,d \in \{1,2,3,4\} \Rightarrow e = 5 \Rightarrow g \in A_4$ □