Ein Beispiel zum Binomialkoeffizienten

wgnedin@math.uni-koeln.de

October 28, 2013

In dieser Notiz wird erläutert, warum der Binomialkoeffizient übereinstimmt mit der Anzahl der Möglichkeiten, "Teilmengen aus einer Menge" auszuwählen. Wir betrachten dazu ein konkretes Beispiel, welches im Grunde genommen den allgemeinen Fall widerspiegelt.
Gegeben sei eine Menge $X = \{a, b, c, d, e\}$ mit fünf verschiedenen Elementen. Wir wollen die Anzahl der Teilmengen von X ermitteln, die genau drei Elemente haben.
Jede 3-elementige Teilmenge T kann folgendermaßen gebildet werden:

1. zuerst wählen das erste Element x aus X,

2. dann wählen wir das zweite Element y aus $X\backslash\{x\}$ (aus X ohne x),

3. zuletzt das dritte Element z aus $X\backslash\{x, y\}$ (aus X ohne x und y).

Soweit haben wir drei verschiedene Elemente x, y und z gewählt. Diese drei Elemente bilden die 3-elementige Teilmenge $T = \{x, y, z\}$ von X.
Nun zählen wir, wieviele mögliche Teilmengen wir erhalten haben.
Zunächst zählen wir die Möglichkeiten, x, y und z wie oben zu wählen:

1. für die Wahl von x hatten wir 5 Möglichkeiten,

2. für die Wahl von y gab es 4 Möglichkeiten,

3. für die Wahl von z gab es 3 Möglichkeiten.

Das ergibt $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten für die Wahl von x, y und z.

Hier sind alle 60 Kombinationen für die drei Elemente (x, y, z):

$$\begin{array}{cccccc}
(a,b,c) & (b,c,a) & (c,a,b) & (a,c,b) & (c,b,a) & (b,a,c) \\
(a,b,d) & (b,d,a) & (d,a,b) & (a,d,b) & (d,b,a) & (b,a,d) \\
(a,b,e) & (b,e,a) & (e,a,b) & (a,e,b) & (e,b,a) & (b,a,e) \\
(a,c,d) & (c,d,a) & (d,a,c) & (a,d,c) & (d,c,a) & (c,a,d) \\
(a,c,e) & (c,e,a) & (e,a,c) & (a,e,c) & (e,c,a) & (c,a,e) \\
(a,d,e) & (d,e,a) & (e,a,d) & (a,e,d) & (e,d,a) & (d,a,e) \\
(b,c,d) & (c,d,b) & (d,b,c) & (b,d,c) & (d,c,b) & (c,b,d) \\
(b,c,e) & (c,e,b) & (e,b,c) & (b,e,c) & (e,c,b) & (c,b,e) \\
(b,d,e) & (d,e,b) & (e,b,d) & (b,e,d) & (e,d,b) & (d,b,e) \\
(c,d,e) & (d,e,c) & (e,c,d) & (c,e,d) & (e,d,c) & (d,c,e)
\end{array} \tag{1}$$

Nun ist jedes Tripel der Form (x, y, z) keine Menge, sondern eine *Folge* von drei *verschiedenen* Elementen aus X. Die Elemente x, y und z der Folge bilden die Teilmenge $\{x, y, z\}$ von X.
Das heißt, Folgen, welche die gleichen Elemente enthalten, ergeben die *gleiche* Teilmenge.
Zum Beispiel erhalten wir aus jeder der 6 Folgen

$$(a,b,d) \quad (b,d,a) \quad (d,a,b) \quad (a,d,b) \quad (d,b,a) \quad (b,a,d)$$

die gleiche Teilmenge $\{a, b, d\}$ von X.
Angenommen, wir haben die Teilmenge $\{x, y, z\}$ bei unserer Auswahl erhalten. Zu wievielen der 60 möglichen Folgen gehört die Teilmenge $\{x, y, z\}$? Die Antwort ist $6 = 3!$, denn es gibt $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten aus x, y und z eine Folge zu bilden:

$$(x,y,z) \quad (y,z,x) \quad (z,x,y) \quad (x,z,y) \quad (z,y,x) \quad (y,x,z) \quad \Longrightarrow \{x,y,z\}$$

Das heißt, bei unseren 60 möglichen Folgen von drei verschiedenen Elementen von X ergeben *jeweils* 6 *Folgen* die *gleiche* Teilmenge. In Tabelle 1 ergeben die 6 Folgen einer Zeile die gleiche Teilmenge.
Das heißt wir erhalten $60 : 6 = 10$ mögliche Teilmengen mit 3 Elementen von $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\begin{array}{ccccc}
\{a,b,c\} & \{a,b,d\} & \{a,b,e\} & \{a,c,d\} & \{a,c,e\} \\
\{a,d,e\} & \{b,c,d\} & \{b,c,e\} & \{b,d,e\} & \{c,d,e\}
\end{array}$$

Auf genau die gleiche Art und Weise werden im Binomialkoeffizienten die 3-elementigen Teilmengen von $X = \{a, b, c, d, e\}$ gezählt! Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned}
\binom{5}{3} &= \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2!} \cdot \frac{1}{3!} \\
&= \underbrace{(5 \cdot 4 \cdot 3)}_{\#\text{ Folgen von 3 versch. Elementen aus } X} : \underbrace{3!}_{\#\text{ Anordnungen von 3 Elementen}} \\
&= \text{Anzahl 3-elementiger Teilmengen der 5-elementigen Menge } X.
\end{aligned}$$

Hier ist das allgemeine Schema:
Sei X eine Menge mit n Elementen. Wir wollen die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von X wissen.

1. es gibt

   $$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

   Möglichkeiten eine Folge $(x_1, \ldots, x_k)$ von k verschiedenen Elementen aus X auszuwählen;

2. jeweils $k!$ Folgen, die aus k verschiedenen Elementen bestehen, ergeben die gleiche k-elementige Teilmenge;

3. es gibt also

   $$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) : k! = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \binom{n}{k}$$

   Möglichkeiten eine Teilmenge von k Elementen aus der Menge X (welche n Elemente hat) zu wählen.

Mit anderen Worten, entspricht die Wahl einer k-elementigen Teilmenge der n-elementigen Menge X dem Vorgang

- k Elemente aus n verschiedenen Elementen “ohne Zurücklegen´´ zu ziehen,
- die Reihenfolge der k gezogenen Elemente zu ignorieren.