Die Lösungen der Gleichung $b^x = \log_b(x)$

wgnedin@math.uni-koeln.de

17. Januar 2014

In der ersten Vorlesung des Wintersemesters wurde folgende Frage gestellt: Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}}(x) \quad ? \tag{1}$$

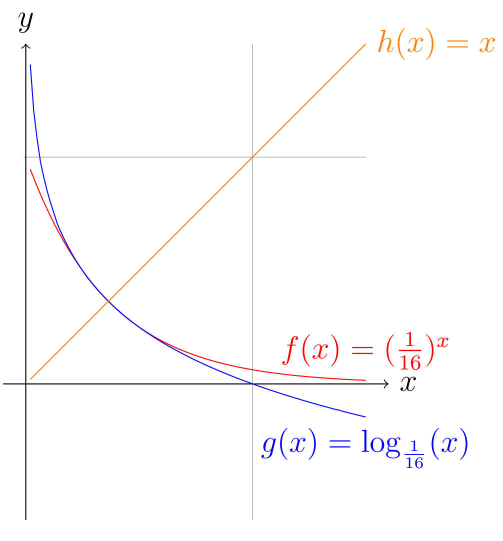
In dieser Notiz kehren wir zu dieser Frage zurück.

1 Erste Beobachtungen

Wir wiederholen zunächst die Beobachtungen aus der ersten Vorlesung:

1. Die linke Seite von Gleichung (1) lässt sich als Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ und die rechte Seite als $g(x) = \log_{\frac{1}{16}}(x)$ auffassen. Die Lösungen der Gleichung sind genau die Schnittpunkte der beiden Funktionen f und g.

2. Skizzieren wir beide Funktionen, so erhalten wir:



(2)

Glaubt man diesem Bild, so scheinen f und g nur einen Schnittpunkt zu haben. Dieser Schnittpunkt liegt auf der “Diagonalen” $h(x) = x$.

3. Allerdings kann man direkt nachrechnen, dass $x_1 = \frac{1}{2}$ sowie $x_2 = \frac{1}{4}$ ebenfalls Schnittpunkte von f und g sind:

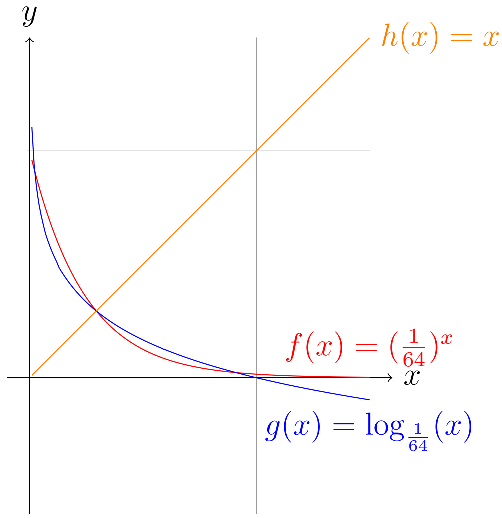
$$f(x_1) = f(\tfrac{1}{2}) = \left(\tfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4} = \log_{\frac{1}{16}}(\tfrac{1}{2}) = g(x_1),$$
$$f(x_2) = f(\tfrac{1}{4}) = \left(\tfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} = \log_{\frac{1}{16}}(\tfrac{1}{4}) = g(x_2).$$

Keiner der beiden Schnittpunkte zu x_1 und x_2 von f und g liegt auf der Diagonalen $h(x) = x$.
Das heißt, dass Abbildung (2) zu grob ist, um alle Schnittpunkte von f und g zu bestimmen.
Gleichung (1) scheint soweit mindestens drei Lösungen zu haben. Wir wissen noch nicht, ob es genau drei Lösungen gibt.

4. Wir betrachten zuletzt Gleichung (1) zur Basis $\frac{1}{64}$ statt $\frac{1}{16}$:

$$\left(\frac{1}{64}\right)^x = \log_{\frac{1}{64}}(x) \tag{3}$$

Skizzieren wir die Funktionen der linken und rechten Seite, so erhalten wir:



(4)

Dem Bild zufolge gibt es genau drei Schnittpunkte. Das obere Beispiel zeigt jedoch, dass wir uns auf die graphische Darstellung nicht verlassen können, um alle Schnittpunkte zweier Funktionen zu bestimmen.

In dieser Notiz werden wir mit analytischen Methoden die genaue Anzahl der Lösungen von Gleichungen der Form (1) oder (3) ermitteln.

2 Die Gleichung $b^x = \log_b(x)$

Wir betrachten nun eine Gleichung der Form

$$b^x = \log_b(x) \tag{5}$$

Zuerst erinnern wir an mögliche Definitionen der beiden Ausdrücke:

$$b^x = e^{x \cdot \ln(b)}, \qquad\qquad \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

Die Funktion $f(x) = b^x$ kann für alle $b > 0$ definiert werden.
Der Ausdruck $\log_b(x)$ ist wohldefiniert, falls $b \neq 1$ und $x > 0$ gilt.
Sei also $b > 0$ und $b \neq 1$. Unser Ziel ist es zu bestimmen, wie viele $x > 0$ es gibt, für die Gleichung (5) erfüllt ist.

Um dieses Problem zu lösen, kann man folgenden Ansatz wählen:

1. Wir definieren eine Funktion $d(x) = b^x - \log_b(x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$. Dann entsprechen die Lösungen der Gleichung $b^x = \log_b(x)$ genau den Nullstellen der Funktion d.

2. Um die Anzahl der Nullstellen einer Funktion d zu bestimmen, brauchen wir folgende Informationen:

   - Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs,
   - die Stellen an den d ein Minimum oder Maximum hat, sowie die Vorzeichen der Minimum- und Maximumwerte,
   - Intervalle auf denen d konstant Null ist.

   Für den zweiten und dritten Punkt kann man die Ableitung d' bilden und versuchen, die Nullstellen von d' zu bestimmen.

3. Nachdem wir den Verlauf der Funktion d kennen, können wir folgenden Satz gebrauchen:

   Nullstellensatz von Bolzano (Spezialfall des Zwischenwertsatzes):
   Sei $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(c) > 0$. Dann gibt es ein $x \in (a, c)$ mit $f(x) = 0$.

   Mit diesem Satz kann man die Existenz von Nullstellen in Intervallen mit Vorzeichenwechsel folgern.

Das ist ein allgemeiner Ansatz, um die Nullstellen einer Funktion zu bestimmen. In unserem speziellen Fall werden wir einige Abkürzungen gehen können.

Zunächst können wir Gleichung (5) folgendermaßen umformen:

$$b^x = \log_b(x) \quad \Longleftrightarrow \quad b^{b^x} = x.$$

Nun betrachten wir folgende Gleichung:

$$b^x = x \tag{6}$$

Man kann direkt sehen, dass jede Lösung x von Gleichung (6) auch eine Lösung von Gleichung (5) ist.
Daher wollen wir im nächsten Abschnitt zunächst die Anzahl der Lösungen von Gleichung (6) bestimmen. Danach werden wir auf Gleichung (5) zurückkommen.

2.1 Die Gleichung $b^x = x$

Wir formen Gleichung (6) folgendermaßen um:

$$b^x = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot \ln(b) = \ln(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(b) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Hierbei können wir auch den Fall $b = 1$ betrachten. In diesem Abschnitt sei also $b > 0$. Wir definieren eine Funktion $l(x) = \frac{\ln(x)}{x} - \ln(b)$. Dann sind die Lösungen von $b^x = x$ genau die Nullstellen von l.
Die Bestimmung der Nullstellen von l ist als Übungsaufgabe gestellt.

Aufgabe 1: Kurvendiskussion von $l(x) = \frac{\ln(x)}{x} - \ln(b)$.
Zeigen sie folgende Aussagen:

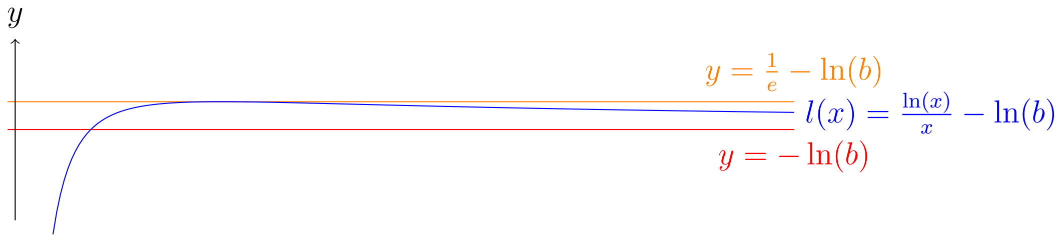
1. An den Ränden des Definitionsbereichs von l gilt:

$$\lim_{x \to 0+} l(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} l(x) = -\ln(b).$$

2. Die Funktion l hat genau ein Maximum. Das Maximum wird an der Stelle $x = e$ angenommen und der Maximumswert ist $l(e) = \frac{1}{e} - \ln(b)$.

3. Im Intervall $(0, e)$ ist die l streng monoton steigend und im Intervall (e, ∞) ist l streng monoton fallend.

Anhand dieser drei Aussagen können wir l folgendermaßen skizzieren:



(7)

Die Position der x-Achse in Bild (7) hängt von dem Wert von $\ln(b)$ ab.
Da wir nun den Verlauf von l kennen, sind folgende Behauptungen plausibel:

Anzahl der Nullstellen von l:

- Falls $\ln(b) \leq 0$ gilt, so hat l genau *eine* Nullstelle;
- Falls $0 < \ln(b) < \frac{1}{e}$ gilt, so hat l genau *zwei* Nullstellen;
- Falls $\ln(b) = \frac{1}{e}$ gilt, so hat l genau *eine* Nullstelle;
- Falls $\ln(b) > \frac{1}{e}$ gilt, so hat l *keine* Nullstellen.

Aufgabe 2:
Beweisen Sie die Aussagen über die Anzahl der Nullstellen von l.

Da die Nullstellen von l den Lösungen der Gleichung $b^x = x$ entsprechen, haben wir folgendes Ergebnis über die Anzahl der Lösungen von $b^x = x$:

$$\begin{array}{rcccc} \text{Bedingung:} & b \leq 1 & 1 < b < e^{\frac{1}{e}} & b = e^{\frac{1}{e}} & b > e^{\frac{1}{e}} \\ \text{Anzahl Lösungen:} & 1 & 2 & 1 & 0. \end{array} \tag{8}$$

2.2 Die Gleichung $b^x = \log_b(x)$ mit $b > 1$

Sei wieder $b > 0$ und $b \neq 1$. Wir betrachten nun wieder die Gleichung

$$b^x = \log_b(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

Es wurde bereits erwähnt, dass die Gleichung folgende Formulierung hat:

$$b^x = \log_b(x) \quad \Longleftrightarrow \quad b^{b^x} = x,$$

sowie dass folgende Aussage gilt:

$$b^x = x \quad \Longrightarrow \quad b^{b^x} = x.$$

Wir definieren nun eine Funktion $f(x) = b^x$. Damit lautet die letzte Aussage:

$$f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f(f(x)) = x.$$

Es gibt eine Umkehrung dieser Aussage im folgenden Fall:

Lemma: Sei f eine reell-wertige, streng monoton wachsende Funktion. Dann gilt $f(x) = x$ genau dann, wenn $f(f(x)) = x$.

Aufgabe 3: Beweisen Sie das Lemma.

Wir wollen nun das Lemma auf unseren Fall anwenden:

Falls $b > 1$ beziehungsweise $\ln(b) > 0$ gilt, ist $f(x) = b^x = e^{x \cdot \ln(b)}$ streng monoton wachsend. Nach dem Lemma sind also die Gleichungen (6) und (5) für alle $b > 1$ äquivalent. In diesem Fall beantwortet somit (8) die Frage, wieviele Lösungen Gleichung (5) hat.

2.3 Die Gleichung $b^x = \log_b(x)$ mit $0 < b < 1$

Es bleibt der Fall, dass $0 < b < 1$ gilt. Nach (8) hat die Gleichung $b^x = x$ in diesem Fall genau eine Lösung. Diese bezeichnen wir im Folgenden mit x_1. Inbesondere ist x_1 auch eine Lösung der Gleichung $b^x = \log_b(x)$.

Wir definieren eine neue Funktion als Differenz der beiden Seiten von Gleichung (5):

$$d(x) = b^x - \log_b(x)$$

Die Lösungen der Gleichung $b^x = \log_b(x)$ sind genau die Nullstellen von $d(x)$. Insbesondere ist $d(x_1) = 0$.
Um alle Nullstellen von d zu bestimmen, brauchen wir den Verlauf von d durch.

Aufgabe 4: Randverhalten und Ableitung von $d(x) = b^x - \log_b(x)$:

1. Zeigen Sie dass für die Ränder des Definitionsbereichs von d gilt:

$$\lim_{x \to 0+} d(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} d(x) = +\infty. \tag{9}$$

2. Zeigen Sie, dass die Ableitung von d lautet:

$$d'(x) = \frac{x \cdot b^x \cdot \ln^2(b) - 1}{x \cdot \ln(b)}.$$

Sei $\delta(x) = x \cdot b^x \cdot \ln^2(b) - 1$ der Zähler von $d'(x)$.
Wegen $b < 1$ gilt $d'(x) < 0$ genau dann, wenn $\delta(x) > 0$. Analog gilt $d'(x) > 0$ genau dann, wenn $\delta(x) < 0$.

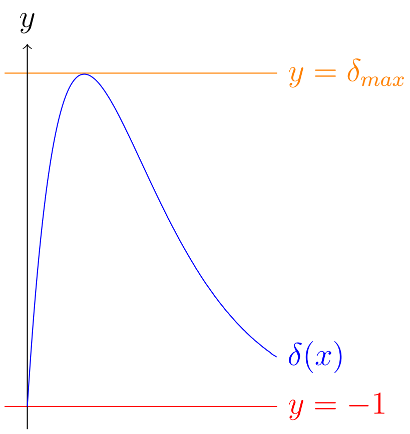
Aufgabe 5: Kurvendiskussion von $\delta(x) = x \cdot b^x \cdot \ln^2(b) - 1$:
Zeigen sie folgende Aussagen:

1. An den Rändern des Definitionsbereichs gilt:
$$\delta(0) = -1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} \delta(x) = -1.$$

2. Die Funktion δ hat genau ein Maximum. Das Maximum wird an der Stelle $x = -\frac{1}{\ln(b)}$ angenommen und der Maximumswert ist
$$\delta_{max} := \delta\left(-\frac{1}{\ln(b)}\right) = -\frac{\ln(b)}{e} - 1;$$

3. auf dem Intervall $(0, -\frac{1}{\ln(b)})$ ist δ streng monoton steigend und auf dem Intervall $(-\frac{1}{\ln(b)}, \infty)$ ist δ streng monoton fallend.

Anhand dieser drei Aussagen erhalten wir folgendes Bild von δ:



(10)

Dem Graph zufolge hat δ keine, eine oder zwei Nullstellen, je nachdem, ob $\delta_{max} < 0$, $\delta_{max} = 0$ oder $\delta_{max} > 0$ gilt. Als Nächstes werden wir zwischen den beiden Fällen $\delta_{max} \leq 0$ und $\delta_{max} > 0$ unterscheiden.

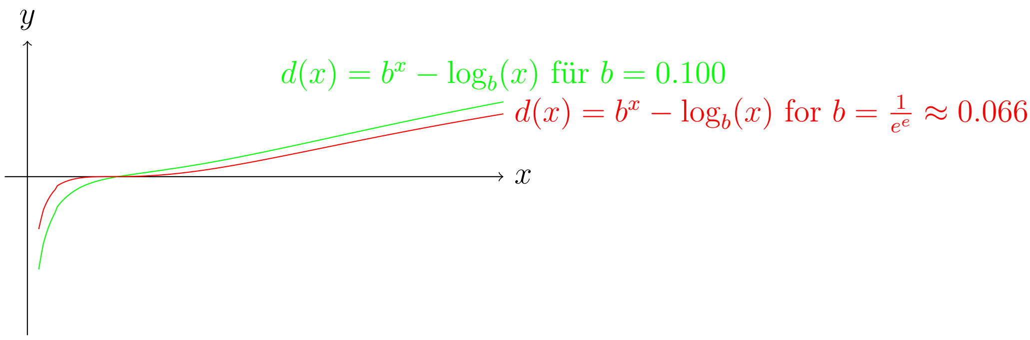
2.3.1 Die Gleichung $b^x = \log_b(x)$ für $\frac{1}{e^e} \leq b < 1$

Wir nehmen nun an, dass $\delta_{max} \leq 0$ gilt. Dies ist äquivalent zu $b \geq \frac{1}{e^e}$.
In diesem Fall gilt $\delta(x) \leq 0$ und $d'(x) \geq 0$ für alle $x > 0$. Daraus folgt, dass d monoton wächst. d wächst sogar streng monoton, da es höchstens ein $x > 0$ mit $d'(x) = 0$ gibt.
Mit (9) und dem Nullstellensatz von Bolzano folgt nun, dass d genau eine Nullstelle x_0 hat. Da x_1, die Lösung von $b^x = x$, auch eine Nullstelle von d war, folgt $x_0 = x_1$.

Wir haben somit folgendes Ergebnis:

- Falls $\frac{1}{e^e} \leq b < 1$ gilt, so hat die Gleichung $b^x = \log_b(x)$ genau *eine* Lösung x_1, die zugleich Lösung der Gleichung $b^x = x$ ist.

In diesem Fall hat d einen Graphen der folgenden Form:



(11)

Im Fall $b = \frac{1}{e^e}$ hat d einen Wendepunkt an der Nullstelle x_1.

2.3.2 Die Gleichung $b^x = \log_b(x)$ für $0 < b < \frac{1}{e^e}$

Es bleibt der Fall, dass $\delta_{max} > 0$ beziehungsweise $b < \frac{1}{e^e}$ gilt.
Wir wollen als Nächstes zeigen, dass in diesem Fall die Funktion δ in diesem Fall genau zwei Nullstellen hat (siehe Abbildung (10)).

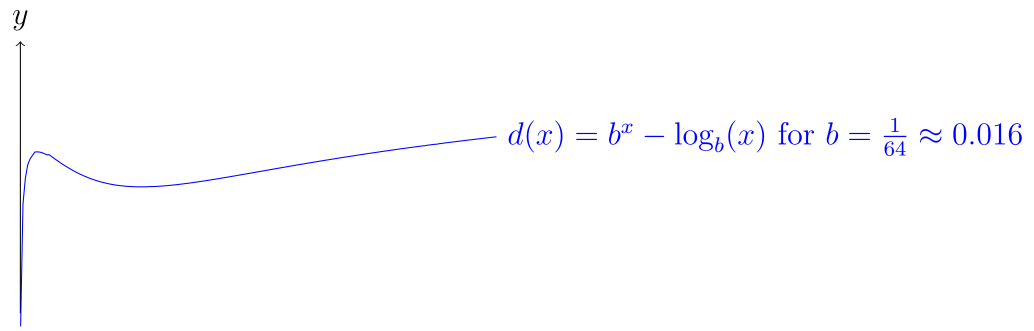
Wegen $\lim_{x\to\infty} \delta(x) = -1$ gibt es ein $c > -\frac{1}{\ln b}$ mit $\delta(c) < 0$. An den Stellen 0, $-\frac{1}{\ln b}$ und c hat δ somit folgende Vorzeichen:

$$\delta(0) = -1 < 0, \qquad \delta(-\tfrac{1}{\ln b}) = \delta_{max} > 0, \qquad \delta(c) < 0.$$

Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt nun, dass die Funktion δ zwei Nullstellen z_1, z_2 mit $z_1 \in (0, -\frac{1}{\ln b})$ und $z_2 \in (-\frac{1}{\ln b}, c)$ hat.
Da $d'(x)$ das umgekehrte Vorzeichen von $\delta(x)$ hat, folgt:

- auf dem Intervall $(0, z_1)$ ist $d'(x) > 0$ und d streng monoton wachsend,
- auf dem Intervall (z_1, z_2) ist $d'(x) < 0$ und d streng monoton fallend,
- auf dem Intervall (z_2, ∞) ist $d'(x) > 0$ und d streng monoton wachsend,
- d nimmt in z_1 ein Maximum und in z_2 ein Minimum an.

Mit (9) folgt nun, dass der Graph von d folgende Form hat:



(12)

An dieser Stelle sehen wir noch nicht die Anzahl der Nullstellen von d. Nehmen wir an, dass sich die Nullstelle x_1 zwischen dem Minimum an z_1 und dem Maximum an z_2 befindet, so müsste d drei Nullstellen haben.
Als letztes wollen wir also zeigen, dass $z_1 < x_1 < z_2$ gilt. Wir erinnern daran, dass x_1 die einzige Lösung der Gleichung $b^x = x$ bezeichnet.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass $x_1 < \frac{1}{e}$ gilt.

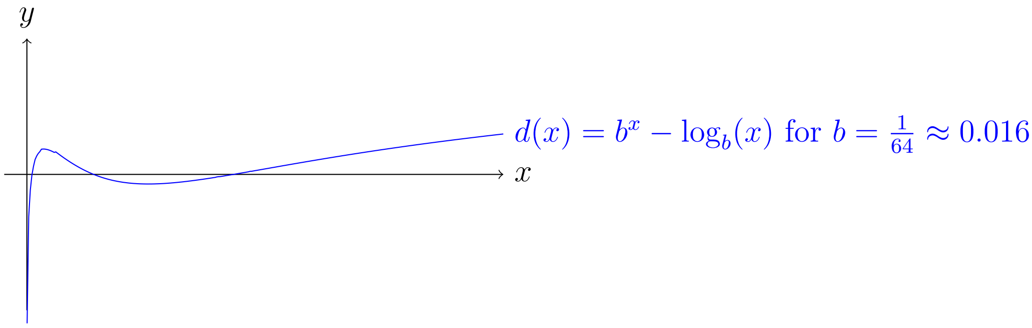
Die Aussage $x_1 < \frac{1}{e}$ ist äquivalent zu $\ln x_1 < -1$. Damit folgt

$$\delta(x_1) = x_1^2 \ln^2 b - 1 = \ln^2 b^{x_1} - 1 = \ln^2 x_1 - 1 > 0$$

Aus $\delta(x_1) > 0$ folgt $d'(x_1) < 0$. Wir haben oben gezeigt, dass $d'(x) < 0$ nur möglich ist, wenn $x \in (z_1, z_2)$.

Nun betrachten wir wieder $d(x)$. Mit $d(x_1) = 0$ und $x_1 \in (z_1, z_2)$ folgt nun $d(z_1) > d(x_1) = 0$ und $d(z_2) < d(x_1) = 0$.

Das heißt wir haben folgende Situation:



(13)

Wegen $\lim_{x \to 0} d(x) = -\infty$ gibt es ein $a < z_1$ mit $d(a) < 0$.
Wegen $\lim_{x \to \infty} d(x) = \infty$ gibt es ein $c > z_2$ mit $d(c) > 0$.
Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt nun, dass d zwei Nullstellen x_2, x_3 mit $x_2 \in (a, z_1)$ und $x_3 \in (z_2, c)$ hat. Insbesondere sind x_1, x_2 und x_3 paarweise verschieden. Das Ergebnis lautet nun:

- Falls $\frac{1}{e^e} \leq b < 1$ gilt, so hat die Gleichung $b^x = \log_b(x)$ genau *drei* Lösungen, wovon eine auch eine Lösung der Gleichung $b^x = x$ ist.

3 Abschließende Bemerkungen

Wir fassen die Ergebnisse nun zusammen.
Sei $b > 0, b \neq 1$. Die Gleichung

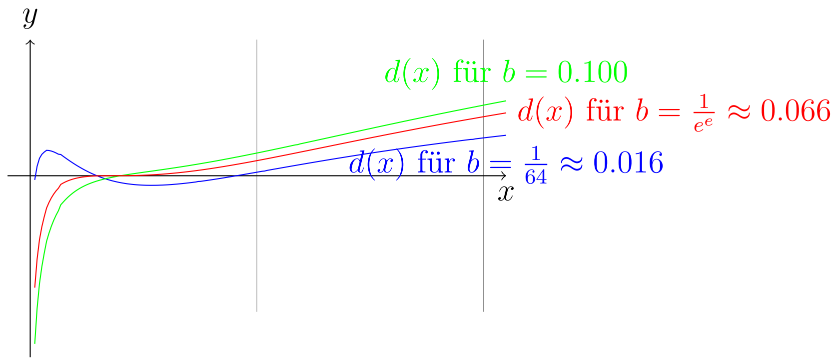
$$b^x = \log_b(x)$$

hat die folgende Anzahl Lösungen $x > 0$:

Bedingung:	$0 < b < \frac{1}{e^e}$	$b = \frac{1}{e^e}$	$1 < b < e^{\frac{1}{e}}$
Anzahl Lösungen:	1	1	3

.

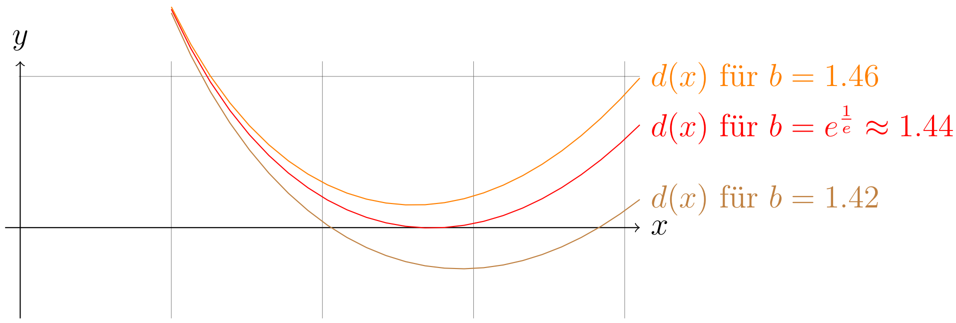
Diese drei Fälle entsprechen den folgenden drei Graphen der Differenzfunktion $d(x) = b^x - \log_b(x)$:



Für $b > 1$ gibt es noch folgende drei Fälle:

Bedingung:	$1 < b < e^{\frac{1}{e}}$	$b = e^{\frac{1}{e}}$	$b > e^{\frac{1}{e}}$
Anzahl Lösungen:	2	1	0

Diese drei Fälle entsprechen den folgenden drei Graphen:



Die Gleichungen (1) und (3) entsprechen den Fällen $b = \frac{1}{16} \approx 0.063$ und $b = \frac{1}{64} \approx 0.016$. In beiden Fällen gilt $b < \frac{1}{e^e} \approx 0.066$ und somit haben die Gleichungen (1) und (3) genau drei Lösungen. In diesen beiden Fällen haben die Funktionen $f(x) = b^x$ und $g(x) = \log_b(x)$ entsprechend genau drei Schnittpunkte.
Das man in Abbildung (2) für den Fall $b = \frac{1}{16}$ kaum die drei Schnittpunkte von f und g sehen konnte, kann damit erklärt werden, dass dieser Fall sehr nah am Grenzfall $b = \frac{1}{e^e}$ liegt, bei dem es tatsächlich nur einen Schnittpunkt gibt.

Im Grunde genommen wurde in dieser Notiz eine Kurvendiskussion nicht einer *Funktion*, sondern einer *Funktionenschar* $d_b(x) = b^x - \log_b(x)$ parametrisiert mit $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ skizziert.