Partitionen natürlicher Zahlen

wgnedin@math.uni-koeln.de

29. Oktober 2013

In dieser Notiz wird der Beweis des Satzes über die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl vorgestellt. Die Darstellung folgt dem Beweis der Vorlesung.

Aufgabenstellung: Seien k und N natürliche Zahlen.
Gesucht ist die Anzahl der Lösung der folgenden Gleichung:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k = N, \tag{1}$$

wobei für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ die Variable x_i eine *natürliche Zahl* oder *Null* sein darf.

Beispiele:

1. Für $k = 1$ gibt es nur eine Lösung: $x_1 = N$.
2. Für $k = 2$ gibt es genau $N + 1$ Lösungen:

   $$(x_1, x_2) = (0, N) \text{ oder } (1, N-1), \ldots, (N-1, 1) \text{ oder } (N, 0).$$

   Hierbei gelten zum Beispiel $(2, N-2)$ und $(N-2, 2)$ als zwei *verschiedene* Lösungen.
3. Der Fall $k = 3$ ist aufwändiger:

   - Wenn wir $x_1 = 0$ wählen, gibt es wie im Fall $k = 2$ insgesamt $N + 1$ Möglichkeiten für x_2 und x_3;
   - Falls $x_1 = 1$, suchen wir Lösungen der Gleichung

     $$x_2 + x_3 = N - 1.$$

     Dafür gibt es N Möglichkeiten.

- Falls wir $x_1 = i$ für ein $i \in \{0, \ldots, N\}$ setzen, gibt es $N - i + 1$ Lösungen der Gleichung

$$x_2 + x_3 = N - i.$$

Für $k = 3$ ist die Anzahl der Lösungen von Gleichung (1) somit:

$$\sum_{i=0}^{N} N - i + 1 = \frac{N \cdot (N+1)}{2} + (N+1) = \frac{(N+1) \cdot (N+2)}{2}$$

Ab dem Fall $k \geq 4$ sind relativ viele Fallunterscheidungen nötig, um die Lösungen nach dem direkten Schema der Beispiele zu zählen. Überraschenderweise gibt es eine prägnante Antwort:

Satz:
Die Anzahl der Lösungen von Gleichung (1) ist genau

$$\binom{N+k-1}{k-1}.$$

Beweis:
Der Idee des Beweises liegen folgende zwei Beobachtungen zugrunde:

1. Lösungen der Gleichung (1) entsprechen gewissen Partitionen von N.
2. Partitionen von N enstprechen gewissen Folgen von Nullen und Einsen.

Wir führen die erste Beobachtung nun genauer aus.
Wir können N als Summe von Einsen schreiben:

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{N\text{-mal}} = N$$

Wenn wir eine Lösung der Gleichung (1) haben, haben wir gewisse $x_i \in \{0, \ldots, N\}$ gegeben. Diese lassen sich ebenfalls als Summen von Einsen darstellen:

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_k &= N \\ &= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{N\text{-mal}} \\ &= \underbrace{1 + \ldots + 1}_{x_1\text{-mal}} + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{x_2\text{-mal}} + \ldots + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{x_i\text{-mal}} + \ldots \\ &\quad + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{x_{k-1}\text{-mal}} + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{x_k\text{-mal}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Das heißt, wir teilen die Summe der N Einsen in k "Pakete" von Einsen auf, wobei das i-te "Paket" aus genau x_i Einsen besteht. Anders ausgedrückt, haben wir eine *Partition* von N in k disjunkte Teile erhalten, die folgende Bedingungen erfüllen:

- ein Teil der Partition kann leer sein (da jede Variable x_i Null sein kann).
- die Teile der Partitionen "überlappen" sich nicht (siehe auch Bemerkung 3 unten).

Es gilt außerdem:

- Verschiedene Lösungen von Gleichung (1) ergeben verschiedene Partitionen;
- Zu jeder Partition von N in k Teile gibt es eine entsprechende Lösung der Gleichung (1);

Somit haben wir eine Bijektion zwischen folgenden Mengen erhalten:

$$\{ \text{ Lösungen der Gleichung (1) } \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{ \text{ Partitionen von } N \text{ in } k \text{ Teile } \}.$$

Wenn wir also die Lösungen der Gleichung zählen wollen, können wir stattdessen versuchen, die Anzahl der Partionen von N in k Teile zu bestimmen.

Nun erläutern wir die zweite Beobachtung der Beweisidee.
Partitionen von N können wir sparsamer codieren. Im oberen Ausdruck (2) können wir "+" weglassen und eine Trennung zwischen jedem i-ten Paket aus x_i Einsen und dem nächsten $i+1$-ten Paket aus x_{i+1} Einsen durch eine 0 darstellen:

$$\begin{aligned}\underbrace{1+\ldots+1}_{x_1\text{-mal}}+\underbrace{1+\ldots+1}_{x_2\text{-mal}}+\ldots+\underbrace{1+\ldots+1}_{x_i\text{-mal}}+\ldots+\underbrace{1+\ldots+1}_{x_{k-1}\text{-mal}}+\underbrace{1+\ldots+1}_{x_k\text{-mal}} \\ =\underbrace{1\ldots1}_{x_1\text{-mal}}0\underbrace{1\ldots1}_{x_2\text{-mal}}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{x_i\text{-mal}}0\ldots0\ \underbrace{1\ldots1}_{x_{k-1}\text{-mal}}\ 0\underbrace{1\ldots1}_{x_k\text{-mal}}\end{aligned} \tag{3}$$

Das Datum (3) kann als eine Folge mit genau N Einsen und genau $k-1$ Nullen gesehen werden. Es sind genau $k-1$ Nullen, da wir $k-1$ Trennstriche zwischen den k Paketen haben. Wieder gilt:

- Verschiedene Partionen von N in k Teile ergeben verschiedene Folgen mit N Einsen und $k-1$ Nullen.

- Zu jeder Folge mit N Einsen und $k-1$ Nullen gibt es eine entsprechende Partition.

Das heißt wir haben eine weitere Bijektion, zwischen den folgenden Mengen:

$$\{ \text{ Partitionen von } N \text{ in } k \text{ Teile } \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{ \text{ Folgen mit } N \text{ Einsen und } k-1 \text{ Nullen } \}$$

Statt Partitionen von N in k Teile zu zählen, können wir versuchen, die Folgen mit den erwähnten Bedingungen zählen.

Im letzten Teil des Beweises zählen wir schließlich die Folgen mit N Einsen und $k-1$ Nullen.
Die Wahl einer solchen Folge mit $N+k-1$ Stellen entspricht folgendem Vorgang: Wir ziehen aus der Menge $\{1, \ldots, N+k-1\}$ genau $k-1$ verschiedene Zahlen. Diese $k-1$ Zahlen entsprechen genau den Stellen der Folge, bei welchen eine Null steht.
Das heißt, dass es

$$\binom{N+k-1}{k-1} = \binom{N+k-1}{N}$$

Folgen mit N Einsen und $k-1$ Nullen beziehungsweise Lösungen der Gleichungen (1) gibt. Damit ist der Satz bewiesen. #

Noch einige Bemerkungen zum Abschluß:

1. Da jede Variable x_i in Gleichung (1) Null sein darf, erhalten wir mit dem Satz die Anzahl aller Partitionen von N mit *maximal k nicht-leeren* Teilen.

2. Wenn wir $k = N$ setzen, erhalten wir

$$\binom{N+N-1}{N-1} = \binom{2N-1}{N}$$

   mögliche Partitionen von N in nicht-leere Teile.

3. Diese Partitionen von N sollten allerdings nicht mit "Partitionen der Menge $\{1, \ldots, N\}$" verwechselt werden!

    - Eine Partition der Menge $M = \{1, \ldots, N\}$ mit k Teilen ist gegeben durch k disjunkte *nicht-leere* Teilmengen, dessen Vereinigung M ergibt.

- im Allgemeinen dürfen sich die Teilmengen einer Partition von M *überlappen*:

  $$\{1, N\} \cup \{2, \ldots, N-1\}$$

  ist eine zulässige Partition der N-elementigen Menge M.

Die Partitionen von N des Beweises überlappen sich nicht (englisch: "*non-crossing* partitions"). So kann z.B. das "Paket zu x_1" in (3) oder (2) nicht aus der ersten und der letzten Eins bestehen.