# Rang und Inverses einer Matrix

wgnedin@math.uni-koeln.de

29. April 2014

In dieser Notiz werden Methoden und Beispiele zur Berechnung des Rangs einer Matrix sowie der Inversen einer invertierbaren Matrix vorgestellt.

## 1 Rang einer Matrix

Im folgenden sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ eine Matrix mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten.

**Definition 1.** *Der* Rang von $A$ *ist definiert als die Dimension des Bildes der Matrix:*

$$\mathrm{rk}(A) := \dim_K(\mathrm{im}(A))$$

Um den Rang einer Matrix zu berechnen, ist folgendes Lemma und folgender Satz hilfreich:

**Lemma 1.** [Vorlesung am 15.4] *Seien $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ invertierbare Matrizen. Dann gilt:*

$$\mathrm{rk}(S \cdot A \cdot T) = \mathrm{rk}(A).$$

**Satz 1.** [Vorlesung vom 22.4]

1. *Links-Multiplikationen $S \longmapsto S \cdot A$ mit einer invertierbaren Matrix $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ entsprechen genau den* Zeilentransformationen *von $A$.*

2. *Analog entsprechen Rechts-Multiplikationen $A \longmapsto A \cdot T$ mit einer invertierbaren Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ genau den* Spaltentransformationen *von $A$.*

Das heißt, wenn wir den Rang einer Matrix $A$ berechnen wollen, können wir beliebige Zeilen- *und* Spaltentransformationen durchführen, wobei der Rang der transformierten Matrix der Rang von $A$ bleibt. Daher müssen wir $A$ auf Zeilenstufenform bringen, und können dann den Rang von $A$ ablesen.

*Beispiel* 1. Sei $A$ folgende Matrix mit 3 Zeilen und 4 Spalten:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 13 & 19 & 4 & 3 \\ 10 & 14 & 2 & 2 \\ 11 & 17 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} =: A$$

Die Matrix $A$ kann durch folgende Spalten- bzw. Zeilentransformationen auf Zeilenstufenform gebracht werden:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 4 & 3 \\ 10 & 14 & 2 & 2 \\ 11 & 17 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -Z_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 13 & 19 & 4 & 3 \\ 10 & 14 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} -S_4 & -3 \cdot S_4 & -3 \cdot S_4 & \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 10 & -5 & 3 \\ 8 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3 \cdot Z_3 \\ -2 \cdot Z_2 \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\frac{5}{4} \cdot Z_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :(-4) \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B$$

Der Rang von $B$ ist zwei:

$$\mathrm{rk}(B) = \dim_K(\mathrm{im}(B)) = \dim_K \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2.$$

Wegen Lemma 1 und Satz 1 gilt nun $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = 2$.

## 2 Inverses einer Matrix

Im folgenden sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ eine quadratische Matrix mit $n$ Zeilen und Id die quadratische Einheitsmatrix mit $n$ Zeilen.

**Definition 2.** *$A$ ist genau dann* invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gibt, so dass gilt:*

$$B \cdot A = \mathrm{Id}\,.$$

**Satz 2.** [Vorlesung am 8.4] *Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$.*

1. *Es gibt höchstens eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ mit $B \cdot A = \mathrm{Id}$.*

2. *Wenn es eine solche Matrix $B$ gibt, dann gilt auch $A \cdot B = \mathrm{Id}$.*

Dem Satz zufolge hat eine invertierbare Matrix $A$ genau eine Links-Inverse Matrix $B$ und diese Matrix ist auch die eindeutige Rechts-Inverse zu $A$. Daher schreibt man $A^{-1}$ für $B$.
Insbesondere ist dann auch die inverse Matrix $B = A^{-1}$ invertierbar. Nach Satz 1 entspricht die Links-Multiplikation $A \longmapsto B \cdot A$ mit der invertierbaren Matrix $B$ einer (im Allgemeinen nicht elementaren) Zeilentransformation von $A$. Somit erhalten wir mit Satz 1 und Definition 2:

**Korollar 1.** *Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn man aus $A$ durch Zeilentransformationen die Einheitsmatrix* Id *erhalten kann.*

Sei nun $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ eine invertierbare Matrix. Wir wollen die inverse Matrix $A^{-1}$ zu $A$ bestimmen. Die Methode die wir anwenden werden, basiert auf Korollar 1 mit folgender Argumentation:

1. Da $A$ invertierbar ist, kann $A$ durch *elementare* Zeilentransformationen, sagen wir $t$ Stück, zur Einheitsmatrix Id gebracht werden.

2. Eine elementare Zeilentransformation einer Matrix $A'$ entspricht der Linksmultiplikation $A \longmapsto F \cdot A'$ mit einer Elementarmatrix $F \in \mathrm{EMat}(n, K)$.

3. Das heißt, dass es $t$ Elementarmatrizen $F_1, \cdot, F_t \in \mathrm{EMat}(n, K)$ gibt, so dass gilt:
$$F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1 \cdot A = \mathrm{Id}$$

4. Mit Satz 2 folgt:
$$A^{-1} = F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1$$

5. Nun multiplizieren wir von rechts mit der Einheitsmatrix:

   $$A^{-1} = A^{-1} \cdot \mathrm{Id} = F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1 = (F_t \cdot F_{t-1} \cdot \ldots \cdot F_1) \cdot \mathrm{Id}\,.$$

   Die rechte Seite ist die Linksmultiplikation der Einheitsmatrix Id mit den $t$ Elementarmatrizen $F_1, \ldots, F_t$.

6. Wir fassen nun diese Linksmultiplikationen mit Elementarmatrizen als *elementare Zeilentransformationen der Einheitsmatrix* Id auf. Das bedeutet, dass wenn wir elementaren Zeilentransformationen, die den Elementarmatrizen $F_1$ bis $F_t$ entsprechen, auf die Einheitsmatrix Id anwenden, wir die inverse Matrix $A^{-1}$ zu $A$ erhalten.

Zusammengefasst erhalten wir die inverse Matrix $A^{-1}$, in dem wir *dieselben* Zeilentransformationen, die aus $A$ die Einheitsmatrix Id machen, auf die Einheitsmatrix Id anwenden.
Hierzu schreiben wir die Matrizen $A$ und Id nebeneinander: $(A|\,\mathrm{Id})$. Nun müssen wir $A$ durch Zeilentransformationen zur Einheitsmatrix umformen, wobei wir die gesamte Matrix $(A|\,\mathrm{Id})$ verändern.

*Bemerkung* 2.

1. In der oberen Argumentation kann man Zeilentransformationen durch Spaltentransformationen und entsprechend Links-Multiplikationen durch Rechts-Multiplikationen mit Elementarmatrizen ersetzen. Damit folgt:

   - Die inverse Matrix $A^{-1}$ kann man bestimmen, in dem man *dieselben* Spaltentransformationen, die aus $A$ die Einheitsmatrix Id machen, auf die Einheitsmatrix Id anwenden.

   Hierzu ist es hilfreich die Matrizen $A$ und Id untereinander zu schreiben.

2. Man darf *entweder* nur Zeilentransformationen auf $(A|\,\mathrm{Id})$ *oder* nur Spaltentransformationen auf $\binom{A}{\mathrm{Id}}$ verwenden, um $A^{-1}$ zu bestimmen.

3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ eine (nicht unbedingt invertierbare) Matrix. Um zu bestimmen, ob $A$ invertierbar ist, können wir $\mathrm{rk}(A)$ berechnen. Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, dürfen wir hierfür beliebige Zeilen- *und* Spaltentransformationen auf $A$ anwenden, ohne dass sich der Rang ändert. Nach einem Korollar der Vorlesung vom 10.04 gilt:

   - *Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{rk}(A) = n$ gilt, d.h. wenn $A$ vollen Rang hat.*

   Diese Aussage kann unter anderem mit Hilfe von Lemma 1 und Korollar 1, sowie der Dimensionsformel bewiesen werden.

*Beispiel* 2. Sei $A$ folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 7 \\ 6 & 3 & 21 & 14 \end{pmatrix}$$

Wir bringen nun $A$ auf Zeilenstufenform und führen dieselben Zeilentransformationen mit der Einheitsmatrix Id durch:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 14 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 21 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 \cdot Z_1 \\ -3 \cdot Z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3 \cdot Z_3 \\ -2 \cdot Z_4 \\ \\ -Z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 2 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \cdot Z_2 \\ \\ -Z_4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \cdot Z_1 \\ \\ -Z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -14 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -14 & -35 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -6 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Die inverse Matrix von $A$ ist also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -14 & -3 & 4 \\ -14 & -35 & 6 & -10 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$