Zwei Beispiele zur Bestimmung von Grenzwerten

wgnedin@math.uni-koeln.de

1. Dezember 2013

In dieser Notiz werden die Grenzwerte zweier Funktionen $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ für $x \to 0$ bestimmt.
Aufgabe 1:

$$\text{Was ist } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}?$$

Zuerst stellen wir eine "plausible" Behauptung über den Grenzwert an:
Wenn man den Graphen von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ skizziert, sieht man, dass die Funktion für x gegen 0 immer größere positive Werte annimmt.
Wir nehmen daher an, dass $f(x)$ für $x \to 0$ bestimmt gegen unendlich konvergiert:

$$\text{Behauptung:} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Eine äquivalente Formulierung der Behauptung ist folgende Aussage:

$$\forall\ C > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ so dass für alle } x \neq 0 \text{ mit } |x| < \delta \text{ gilt: } \quad \left|\frac{1}{x^2}\right| > C. \tag{1}$$

Beweis von (1): Sei eine beliebige Konstante $C > 0$ vorgegeben. Wir müssen ein passendes $\delta > 0$ finden so dass (1) für die vorgegebene Konstante C erfüllt ist. Dazu schauen wir uns an, wozu die letzte Ungleichung in (1) äquivalent ist:

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| > C \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 < \frac{1}{C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Aus $|x| < \frac{1}{\sqrt{C}}$, folgt also $|\frac{1}{x^2}| > C$. Für das vorgegebene C setzen wir nun $\delta = \frac{1}{\sqrt{C}}$. Dann ist $\delta > 0$ und für alle $x \neq 0$ mit $|x| < \delta$ gilt dann $|\frac{1}{x^2}| > C$. Somit ist (1) gezeigt.

Aufgabe 2:

$$\text{Was ist } \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}\,?$$

Wieder brauchen wir erst einmal eine Behauptung über den Grenzwert:
Wir wissen bereits aus der oberen Aufgabe dass $\frac{1}{x^2} \to \infty$ für $x \to 0$.
Somit gilt $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$ für $x \to 0$.
Da $g(y) = e^y$ stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2}}.$$

Der letzte Ausdruck verhält sich vermutlich wie $\lim_{y\to-\infty} e^y$. Wenn wir uns den Graphen zu $g(y) = e^y$ anschauen, sehen wir dass für $y \to -\infty$ die Funktion $g(y)$ immer kleinere positive Werte annimmt. Wir behaupten daher:

$$\text{Behauptung}: \qquad \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Eine äquivalente Formulierung der Behauptung ist folgende Aussage:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ so dass für alle } x \neq 0 \text{ mit } |x| < \delta \text{ gilt:} \qquad \left| e^{-\frac{1}{x^2}} \right| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Beweis von (2): Sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen ein passendes δ finden so dass (2) erfüllt ist. Wir formulieren wieder zuerst die letzte Ungleichung in (2) um:

$$\left| e^{-\frac{1}{x^2}} \right| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{\frac{1}{x^2}} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Unter Verwendung der Ungleichung $e^y > y$ mit $y = \frac{1}{x^2}$ erhalten wir:

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{\frac{1}{x^2}} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Die letzte Ungleichung lässt sich nach $|x|$ auflösen:

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| < \sqrt{\varepsilon}. \tag{5}$$

Für das vorgegebene ε setzen wir nun $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Dann folgt für alle $x \neq 0$ mit $|x| < \delta$ unter Verwendung der Folgerungen in (5), (4) und (3) schließlich die Gültigkeit von (2).