Übung 10

1. (6 Pkt) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige auf $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ gleichverteilte Zufallsvariablen mit $\theta \in \mathbb{R}$. Sei $\min(X_1, \ldots, X_n) = X_{(1:n)} \leq X_{(2:n)} \leq \cdots \leq X_{(n:n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ die Ordnungsstatistik (d.h. die geordneten Daten) und $T = T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{2}(X_{(1:n)} + X_{(n:n)})$ ein Schätzer für θ.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von $X_{(1:n)}$ und $X_{(n:n)}$.

b) Zeigen Sie, dass T unverfälscht ist.

c) Zeigen Sie, dass T konsistent ist.

d) Zeigen Sie, dass T stark konsistent ist.

e) Zeigen Sie, dass T konsistent im quadratischen Mittel ist, d.h. $T \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \theta$.

Hinweis: Für die Teilaufgaben b)–e) ist es zweckmäßig, die Ausdrücke $X_{(1:n)} - (\theta - \frac{1}{2})$ und $(\theta + \frac{1}{2}) - X_{(n:n)}$ zu betrachten.

2. (2x 3 Pkt) Seien X_1 und X_2 unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Statistik $X_1 + X_2$ suffizient für λ ist, die Statistik $2X_1 + X_2$ jedoch nicht.

3. (6 Pkt) Bedingt auf p seien die Daten $X_1, X_2, \ldots, X_n$ binomialverteilt $B(m, p)$, wobei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bekannt ist. Die apriori Dichte $f_p(\vartheta)$ ist gegeben durch:

$$f_p(\vartheta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \vartheta^{a-1} (1-\vartheta)^{b-1} \mathbb{1}_{\vartheta \in (0,1)} \,,$$

wobei $a, b > 0$ (Beta-Verteilung). Bestimmen Sie die aposteriori Dichte und geben Sie den Bayes'schen Punktschätzer für p an.

4. (6 Pkt) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte

$$f_\theta(x) = (2\theta)^{-1} e^{-|x|/\theta}.$$

Finden Sie für θ einen unverfälschten Schätzer mit maximaler Effizienz.