H. Schmidli
C. Heuser

Einführung in die Stochastik

Winter 16/17

Übung 11

1. (6 Pkt) Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine iid Stichprobe, die im Intervall $(0, \theta)$ gleichverteilt ist. Wir bezeichen mit $M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ den grössten Wert der Stichprobe. Zeigen Sie, dass für alle λ_1, λ_2 mit $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ und $\lambda_2^n - \lambda_1^n = 1 - \alpha$ durch

$$[\frac{M}{\lambda_2}, \frac{M}{\lambda_1}]$$

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für θ gegeben ist.

2. (2x 3 Pkt) Bei 51 gesunden Erwachsenen wurde eine mittlere Eisenbindungskapazität von $\bar{x} = 320.6$ Einheiten (μg/100ml Blutserum) und eine empirische Standardabweichung von $s = 31.1$ Einheiten ermittelt.

a) Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die erwartete Eisenbindungskapazität von gesunden Erwachsenen unter der Annahme normalverteilter Eisenbindungskapazitäten und

i) bekannter Standardabweichung $\sigma = 30$ Einheiten,

ii) unbekannter Standardabweichung.

b) Bestimmen Sie die Länge des unter a)i) berechneten 95%-Konfidenzintervalls. Wie gross müsste man den Stichprobenumfang wählen, um die Länge des 95%-Konfidenzintervalls zu halbieren?

3. (3x 2 Pkt) Folgende Daten wurden erhoben:

Körpergröße	174	188	179	184	181	165	183	182	167	175
Schuhgröße	41	44	42	43	42	38	43	44	40	41

a) Stellen Sie die Entwicklung graphisch dar.

b) Führen Sie eine lineare Regression durch.

c) Welche Schuhgröße ist bei einem Mensche mit 190 Körpergröße zu erwarten?

4. (3x 2 Pkt) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit Dichtefunktion

$$f_{X_1}(x) = \theta^{-1} e^{-(x-a)/\theta} I_{(a,\infty)}(x),$$

wobei $\theta > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ unbekannte Parameter sind. Benutzen Sie $T = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$, wobei $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ die Ordnungsstatistiken sind, um ein Konfidenzintervall zum Niveau α für θ herzuleiten. Berechnen Sie die erwartete Intervalllänge. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass $Z_2, \dots, Z_n$ unabhängig sind und die $(n-i+1)Z_i/\theta$ eine Exp(1) Verteilung haben, wobei $Z_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$, $i = 2, \dots, n$.

b) Bestimmen Sie mit Aufgabenteil a) die Verteilung von T/θ.

c) Geben Sie nun ein Konfidenzintervall zum Niveau α für θ an und berechnen Sie dessen erwartete Länge.