H. Schmidli
C. Heuser

Einführung in die Stochastik

Winter 16/17

Übung 2

1. (3+3 Pkt) Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung

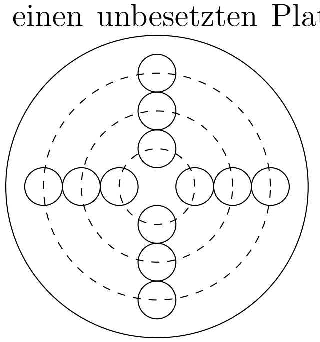
$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r \;, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \;,$$

wobei $p \in (0, 1)$ und $r \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

a) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = 1$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

2. (2+2+2 Pkt) Drei Kinder steigen nacheinander in ein kreisförmiges Karussell ein, welches aus vier Bänken mit jeweils drei Sitzen besteht, und suchen sich zufällig einen unbesetzten Platz aus. In der Skizze sind die Plätze die kleinen



Kreise.

Bezeichne X_i die Anzahl der Kinder in der Bank i und Y_j die Anzahl der Kinder in $j$ten Umlaufbahn, $j = 1, 2, 3$ und $i = 1, \ldots, 4$. Geben Sie ein Modell an und bestimmen Sie

a) die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 und X_4,

b) die gemeinsame Verteilung von X_1 und Y_2,

c) die Verteilung der Anzahl der leeren Bänke.

Hinweis: Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ ist $\mathbb{P}[X_n = x_1, \ldots, X_n = x_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

3. (1.5+1.5+1.5+1.5 Pkt) **(Verdoppelungsstrategie)** Eine faire Münze wird N-mal geworfen. Wenn wir in einem Spiel den Betrag c setzen, bekommen wir, falls wir gewinnen, $2c$ zurück. Wenn wir verlieren, verlieren wir auch den Einsatz. Sei G der Gewinn bei folgendem Spiel: Im ersten Spiel setzen den Betrag 1 auf "Kopf". Wenn "Kopf" fällt, bekommen wir 2 zurück, anderenfalls verdoppeln wir sukzessive den Einsatz, bis erstmals "Kopf" kommt. Das heisst, im zweiten Spiel setzen wir 2, im dritten Spiel setzen wir 4, im vierten Spiel 8, und spielen solange, bis wir gewinnen. Spätestens nach dem N-ten Wurf bricht das Spiel ab. Seien T die Zeit bis zum Abbruch, d.h.

$$T(\omega) = \min\{n \geq 1 : \omega_n = \text{“Kopf”}\} \wedge N \ ,$$

und $X(T)$ das insgesamt eingesetzte Kapital.

a) Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von G.

b) Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von T.

c) Falls $T = n$ ist, wieviel Kapital braucht man, um n Mal zu spielen?

d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X(T)]$.

4. (1+1+1+1 Pkt) Wir betrachten eine Irrfahrt $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i \in \{-1, 1\}$ und

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_N = x_N] = p^{(N+\sum_{i=1}^N x_i)/2}(1-p)^{(N-\sum_{i=1}^N x_i)/2},$$

für $p \in (0,1), p \neq \frac{1}{2}$.

a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[S_N = k]$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}\Big[\big(\frac{1-p}{p}\big)^{S_N/2}\Big]$.

c) Definieren Sie $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}\big[\alpha^{-N}\big(\frac{1-p}{p}\big)^{S_N/2}\mathbb{1}_A\big]$ mit $\alpha = 2\sqrt{p(1-p)}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^*$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist und berechnen Sie

$$\mathbb{P}^*[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_N = x_N].$$

d) Sei Y eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}^*[Y] = \mathbb{E}\big[Y\alpha^{-N}\big(\frac{1-p}{p}\big)^{S_N/2}\big]$, wobei $\mathbb{E}^*$ den Erwartungswert bzgl. des Masses $\mathbb{P}^*$ bezeichnet.

e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}^*\big[\alpha^N\big(\frac{p}{1-p}\big)^{S_N/2}\mathbb{1}_A\big]$.

f) Berechnen Sie $\mathbb{P}[T_0 = 2n]$ für $T_0 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$.