H. Schmidli
C. Heuser

Einführung in die Stochastik

Winter 16/17

Übung 3

1. (3x 2 Pkt) Sei $\Omega = \{-1,1\}^N$ die Menge der Elementarereignisse der Irrfahrt. Wir definieren $\mathcal{F}_k, k \in \{0,1,2,\ldots,N\}$ wie in der Vorlesung.

a) Sei $N = 3$. Bestimmen Sie $\mathcal{F}_2$.

Sei N beliebig.

b) Zeigen Sie, dass $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}_n$.

c) Zeigen Sie für $A, B \in \mathcal{F}_n$, dass auch $A \cap B, A \cup B, A^c \in \mathcal{F}_n$.

2. (4x 1+ 2 Pkt) Wir betrachten eine klassische Irrfahrt $\{S_n\}$, d.h. $\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[X_i = -1] = \frac{1}{2}$. Sei

$$T := \inf\{n \geq 2 : X_n = X_{n-1} = 1\}$$

der erste Zeitpunkt, an dem zwei Erfolge nacheinander auftreten. Ein Spieler hat folgendes Spielsystem: $V_1 = 1$, und für $n \geq 2$

$$V_n = 2 + X_{n-1} = \begin{cases} 3\,, & \text{falls } X_{n-1} = 1, \\ 1\,, & \text{falls } X_{n-1} = -1. \end{cases}$$

Er stoppt das Spiel zur Stoppzeit T.

a) Bestimmen Sie die möglichen Bilanzen S_2^V des Spielsystems zur Zeit $n = 2$.

b) Zeigen Sie (zum Beispiel mit Induktion), falls $\{T > n\}$, dann ist die Bilanz des Spiels zum Zeitpunkt n

$$S_n^V = 1 - n + X_n = \begin{cases} 2 - n\,, & \text{falls } X_n = 1, \\ -n\,, & \text{falls } X_n = -1. \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass zur Stoppzeit T die Bilanz des Spiels $S_T^V = 6 - T$ ist.

d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[T > 2n] \leq (3/4)^n$, und daher $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[T > n] = 0$.

e) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T]$.

3. (4x 1.5 Pkt) Eine Krankheit ist genetisch bedingt, und tritt auf, falls beide Gene eine bestimmte Mutation aufweisen. Tritt die Krankheit auf, stirbt die Person, bevor sie sich fortpflanzen kann, das heisst, noch als Kind. Wir benützen folgendes Modell. Ein Kind bekommt unabhängig von den anderen je ein Gen von Vater und Mutter. Die Eltern geben jedes ihrer beiden Gene mit gleicher Wahrscheinlichkeit weiter. In der erwachsenen Bevölkerung ist, unabhängig vom Geschlecht, der Anteil der Personen, die kein mutiertes Gen tragen α. Die Paarbildung geschieht unabhängig davon, ob die Personen ein mutiertes Gen tragen oder nicht.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind krank ist, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind kein mutiertes Gen hat.

b) Berechnen Sie den Anteil der erwachsenen Bevölkerung der nächsten Generation, die kein mutiertes Gen trägt.

c) Wir nehmen an, dass die Krankheit schon sehr lange existiert, und dass damit der Anteil $\alpha \in [0, 1]$ stabil ist, das heisst, sich nicht in der nächsten Generation ändert. Berechnen Sie α.

d) Interpretieren Sie das Resultat aus c).

4. (4x 1.5 Pkt) Gegeben seien zwei gleiche unfaire Münzen. Auf den jeweiligen Seiten der Münzen befinden sich die Ziffern 0 und 1 und es wird nach einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ die Ziffer 1 angezeigt. Sei $X_i^{(n)}$ die Zufallsvariable, die die Summe aller Ziffern der $i$ten Münze bis einschließlich dem $n$ten Wurf angibt. Berechnen Sie

a) die gemeinsame Verteilung von $(X_1^{(n_1)}, X_2^{(n_2)})$, für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

b) die Verteilung von $X_1^{(n_1)} + X_2^{(n_2)}$,

c) die bedingte Verteilung von $X_1^{(n_1)}$ gegebne $X_1^{(n_1)} + X_2^{(n_2)} = n$, für $n = 0, \ldots, n_1 + n_2$,

d) den bedingten Erwartungswert von $X_2^{(n_2)}$ gegebne $X_1^{(n_1)} + X_2^{(n_2)} = n$, für $n = 0, \ldots, n_1 + n_2$.