H. Schmidli
C. Heuser

Übung 4

1. (3x 2 Pkt) Es seien $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse. Zeigen Sie:

a) Sind A und B sowie B und C unabhängig mit $C \subset A$, dann sind auch $A \setminus C$ und B unabhängig.

b) Sei A eine Menge mit $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$. Dann sind A und jede beliebige Menge B unabhängig.

c) Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt und A_n und B sind unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$, dann sind auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und B unabhängig.

2. (3 + 3 Pkt) Die Variablen $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ seien unabhängig mit $\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}$. Wir setzen $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{P}[Y_n = 1] = \mathbb{P}[Y_n = -1] = \frac{1}{2}$ (z.B. mit Induktion).

b) Die Variablen $\{Y_k : k \in \mathbb{N}\}$ sind unabhängig.

3. (3 + 3 Pkt)

a) Seien $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ σ-Algebren für eine Indexmenge I. Beweisen Sie, dass

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$$

eine σ-Algebra ist.

b) Sei $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,\infty)}$ eine wachsende Folge von σ-Algebren, d.h. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für $s \leq t$. Sei weiter $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $\forall t \geq 0$. Sei T eine Zufallsvariable mit $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ $\forall t \geq 0$. Wir definieren

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\} \ .$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_T$ eine σ-Algebra ist.

4. (4x 1.5 Pkt) Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus A$. Wir definieren $\Omega = A \cup a$. Man gebe

a) die kleinste σ-Algebra über Ω an,

b) die größte σ-Algebra über Ω an,

c) die von $\{A, \{2\}\}$ erzeugte σ-Algebra über Ω an

d) und man untersuche, ob die Vereinigung von σ-Algebren immer eine σ-Algebra ist.