H. Schmidli
C. Heuser

Übung 5

1. (2x 3 Pkt)

a) Es sei X eine reelle Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit streng monotoner und stetiger Verteilungsfunktion F. Man setze $Y = F(X)$ und bestimme die Verteilung von Y.

b) Sei Z gleichverteilt auf $[0, 1]$. Setze $Y := G(Z)$ und berechne die Verteilung von Y, falls

i)
$$G(x) = -\frac{\log x}{\lambda}\,, \qquad \lambda > 0\,,$$

ii)
$$G(x) = \frac{a}{x^{1/b}} - a\,, \qquad a, b > 0\,,$$

iii)
$$G(x) = \Big(\frac{\log x}{-a}\Big)^{\frac{1}{b}}\,, \qquad a, b > 0\,.$$

2. (3x 2 Pkt)

a) Sei $X^2(\omega)$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sind die Funktionen

i) $X(\omega)$,

ii) $|X(\omega)|$

auch Zufallsvariablen?

b) Welche der folgenden Funktionen sind Verteilungsfunktionen?

i)
$$F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan x\,.$$

ii)
$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \le 0, \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{2}\,, & \text{falls } 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{falls } x > 2. \end{cases} \qquad \text{mit } \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}\,.$$

c) Eine Zufallsvariable X hat die Dichte $f(x) = ae^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$.

i) Bestimmen Sie den Parameter a.

ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

3. (6 Pkt) Es gelte $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[X_i \neq Y_i] < \infty$. Zeigen Sie, dass f.s. gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} X_i(\omega) \text{ konvergiert } \iff \sum_{i\in\mathbb{N}} Y_i(\omega) \text{ konvergiert.}$$

4. (3x 2 Pkt) Die Variablen X_n seien exponential mit Parameter 1 verteilt und unabhängig.

a) Sei $A_n = \{X_n > \alpha \ln n\}$. Zeigen Sie, dass unendliche viele A_n eintreten, falls $\alpha \leq 1$ und nur endlich viele A_n eintreten, falls $\alpha > 1$.

b) Berechnen Sie $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n / \ln n$.

c) Berechnen Sie $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n / \ln n$.
Hinweis: Wie oft tritt $\{X_n \leq 2\}$ ein?