Übung 6

1. (2x 3 Pkt) Sei Y eine nichtnegative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie

a)
$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty (1 - F(y)) \, \mathrm{d}y.$$

b)
$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}[Y > k] \le \mathbb{E}[Y] \le \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}[Y > k] \; .$$

2. (3x 2 Pkt) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wir definieren die Mengenabbildung $\widetilde{\mathbb{P}} : \mathcal{F} \to [0, \infty)$,

$$A \mapsto \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X - \theta\mu - \theta^2\sigma^2/2} \mathbb{1}_A] \; ,$$

wobei $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$, falls $\omega \in A$ und $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$, falls $\omega \notin A$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X}] = \mathrm{e}^{\theta\mu + \sigma^2\theta^2/2}$.

b) Zeigen Sie, dass $\widetilde{\mathbb{P}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass ist.

c) Bestimmen Sie die Verteilung von X bezüglich des Masses $\widetilde{\mathbb{P}}$.

3. (3x 2 Pkt) Die Variablen $\{X_k\}$ seien exponentialverteilt mit Parameter α und N sei Poisson-verteilt mit Parameter λ. Alle Variablen seien unabhängig. Wir interessieren uns für die Summe $S = \sum_{k=1}^N X_k$, wobei $\sum_{k=1}^0 X_k = 0$.

a) Berechnen Sie jeweils die momentenerzeugende Funktion der Variablen X_k und N.

b) Zeigen Sie, dass
$$M_S(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rS}] = \exp\{\frac{\lambda r}{\alpha - r}\}$$
für $r < \alpha$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $c \geq \lambda/\alpha$

$$\mathbb{P}[S \geq c] \leq \exp\{-(\sqrt{\alpha c} - \sqrt{\lambda})^2\} \ .$$

4. (2x 3 Pkt) Sei X eine positive Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert und $Y := \ln(1+X) + X \cdot \sin(X) + \sqrt{X}$.

a) Berechnen Sie eine obere Schranke für den Erwartungswert von Y .

b) Berechnen Sie eine obere Schranke für $\mathbb{P}[Y \geq x]$.