Übung 7

1. (5 Pkt) Seien X und Y zwei absolutstetige Zufallsvariablen. Berechnen Sie die Verteilung von $Z = XY$. Wie sieht die Dichte von Z für unabhängige Pareto-verteilte Zufallsvariablen

$$f_{X,Y}(x,y) = \alpha\beta x^{-\alpha-1} y^{-\beta-1} \mathbb{1}_{x>1} \mathbb{1}_{y>1}$$

aus?

2. (4x 1.5 Pkt) Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f(x,y) = \frac{\alpha^2}{x} y^{-\alpha-1} \mathbb{1}_{1\le x\le y} \;, \qquad \alpha > 0 \;.$$

a) Zeige, dass $f(x,y)$ tatsächlich eine Dichte ist.

b) Sind X und Y unabhängig?

c) Berechne die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $W := \log X$ und $Z := \log(Y/X)$.

d) Sind Z und W unabhängig?

3. (7x 1 Pkt) $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion F. Wir betrachten die Zufallsvariablen

$$Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \quad \text{und} \quad Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \;.$$

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen von Y und Z.

b) F sei absolutstetig mit Dichtefunktion f. Berechnen Sie die Dichtefunktionen von Y und Z.

c) Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von Y und Z, also $\mathbb{P}[Y \le y, Z \le z]$ für $y, z \in \mathbb{R}$.

d) Bestimmen Sie die bedingte Dichte und die bedingte Verteilung von Z gegeben $\{Y = y\}$.

e) Berechnen Sie (in Integralform) $\mathbb{E}[Z \mid Y = y]$.

Seien nun $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen.

f) Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen von Y und Z.

g) Berechnen Sie $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathbb{E}[Z \mid Y = y]$.

4. (3x 2 Pkt) Sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dartpfeil $Z = (X, Y)$ in den Bereich $A \subset \mathbb{R}^2$ landet, wie folgt gegeben:

$$\mathbb{P}_{a,b,c,r}(Z \in A) = \int_A f_{a,b,c,r}(x, y) d(x, y).$$

Sei $D := \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Bereich der Dartscheibe und

$$f_{a,b,c,r}(x, y) = (ax^2 + by^2 + cxy)\mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq r^2\}},$$

wobei die Parameter $r > 0.1$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ unterschiedliche Dartspieler modellieren.

a) Wie hängen a, b, c und r voneinander ab, so dass $f_{a,b,c,r}$ eine Dichtefunktion von Z ist?

b) Sei $B := \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 0.1^2\}$ das Bullseye. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler dieses trifft? Wie müssen die Parameter gewählt sein, dass die Wahrscheinlichkeit maximal ist?

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Hinweis: $\int (\cos(x))^n dx = \frac{1}{n}(\cos(x))^{n-1} \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int (\cos(x))^{n-2} dx$ für $n \in \mathbb{N}$.

Die Fachschaft Mathematik lädt Sie ganz herzlich zur ihrer Weihnachtsfeier im Asta Café am Mittwoch, den 14. Dezember ab 18:00 Uhr ein.