H. Schmidli
C. Heuser

Übung 8

1. (6 Pkt) Sei $\{X_n\}$ eine Folge von Zufallsvariablen. Man zeige, dass X_n genau dann stochastisch nach 0 konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{X_n^2}{1+X_n^2}\Big] = 0 \,.$$

2. (4x 1.5 Pkt) Für jede Zufallsvariable X definieren wir die Abbildung $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $r \mapsto (\mathbb{E}[\cos(rX)], \mathbb{E}[\sin(rX)])$. Wir benutzen die übliche Norm $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

a) Zeigen Sie, $\|\varphi_X(r)\| \le 1$.

b) Zeigen Sie, ist $\varphi_X(r) = (1, a)$, so ist $a = 0$.

c) Zeigen Sie, ist $\mathbb{P}[X \in \mathbb{Z}] = 1$, so ist $\varphi_X(2\pi) = (1, 0)$.

d) Nehmen wir an, die Folge $\{X_n\}$ konvergiert in Verteilung gegen eine Variable X. Zeigen Sie, dass $\varphi_{X_n}(r)$ gegen $\varphi_X(r)$ konvergiert.

3. (3x 2 Pkt) Seien $\{X_n\}_{n\ge1}$, $\{Y_n\}_{n\ge1}$, X und Y reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $a \in \mathbb{R}$. Weiter seien $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

a) Wenn $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, dann folgt $h(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(X, Y)$.

b) Wenn $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$, dann folgt $\phi(X_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} \phi(X)$.

c) Wenn $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ und $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$, dann folgt $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} a + Y$.

4. (6 Pkt) Sei $X_n := a_n|X|\mathbb{1}_{Z \leq b_n}$, wobei X normalverteilt und Z unabhängig von X gleichverteilt auf $[0,1]$ ist. a_n und b_n sind Folgen von positiven Zahlen mit $b_n \leq 1$. Was müssen a_n und b_n erfüllen, damit stochastisch Konvergenz, fast sicher Konvergenz, Konvergenz in L^p oder Konvergenz in Verteilung vorliegt?

Liebe Studierende! Die Fachschaft Mathematik möchte Weihnachten feiern. Mit Euch! Ihr seid eingeladen am 14.12. ab 18 Uhr im Asta Cafe einen Glühwein oder Punsch auf die kommenden Feiertage zu trinken. Wir freuen uns auf euch!