Übung 9

1. (2x 3 Pkt) Seien $\{X_n\}_{n\geq 1}$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge von echt positiven reellen Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, so dass

$$\frac{X_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1)\ .$$

Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f'(\mu) \neq 0$ und $X_n(\Omega) \subset I$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie:

a)
$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu\ .$$

b)
$$\frac{f(X_n) - f(\mu)}{f'(\mu)\sigma_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1)\ .$$

2. (6 Pkt) Seien $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ iid mit $\mathbb{E}[Y_k] = 0$ und $\mathbb{E}[Y_k^2] = 1$. Davon unabhängig seien $\{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[Z_k = k] = \mathbb{P}[Z_k = -k] = \tfrac{1}{2}(1 - \mathbb{P}[Z_k = 0]) = a_k\ ,$$

wobei $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k < \infty$. Wir setzten $X_k := Y_k + Z_k$ und $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1)\ .$$

3. (6 Pkt) (*Die Macht entschlossener Minderheiten*) Eine Millionen Wähler müssen sich zwischen zwei Kandidaten A und B entscheiden. Eine Minderheit von tausend Wählern hat sich bereits für Kandidat A entschieden, die restlichen Wähler werfen eine (faire) Münze. Wie groß ist **approximativ** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kandidat A die Wahl gewinnen wird?

4. (6 Pkt) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und Exp(λ)-verteilt. Es bezeichne $\{X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\}$ die geordnete Zufallsstichprobe: $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$. Der Stichprobenmedian ist dann gegeben durch

$$M_n = \begin{cases} X_{([n+1]/2)}\ , & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{2}\{X_{(n/2)} + X_{([n+2]/2)}\}\ , & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Man zeige, dass M_n ein konsistenter Schätzer für $\frac{\ln(2)}{\lambda}$ ist.