Übungsblatt 10

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 26.06.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H29 (10 Punkte): Eine Übung zum Gram-Schmidt-Verfahren. Es seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gegeben. Es sei $U = \mathrm{Lin}(a, b)$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezgl. des Standardskalarprodukts auf dem $\mathbb{R}^4$.

H30 (10 Punkte): Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Wir nennen f unitär, wenn $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in V$. Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, wenn $A^*A = AA^* = E_n$ mit der adjungierten Matrix $A^* := \overline{A}^T$. Außerdem sei die euklidische Norm $\|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}^+$ definiert durch $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

(i) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Die Abbildung f ist unitär.
2. Es gilt $f^* \circ f = f \circ f^* = \mathrm{id}$ mit der Adjungierten f^* von f.
3. Für eine Orthonormalbasis B von V ist die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}_B(f)$ unitär.

(ii) Eine Matrix in $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann unitär, wenn die Spalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bezgl. des Standardskalarprodukts bilden.

(iii) Es gilt die Parallelogrammgleichung: $\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$ für alle $x, y \in V$.

H31 (10 Punkte): Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $W_1, \dots, W_n$ Unterräume. Wir nennen die Summe $W_1 + \cdots + W_n$ von Unterräumen direkt, geschrieben $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$, wenn stets $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_n) = \{0\}$ für alle $i = 1 \dots n$.
Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

(ii) Es gilt $V = W_1 + \cdots + W_n$ und in jeder Darstellung $v = w_1 + \cdots + w_n$ für $v \in V$ mit $w_i \in W_i$ sind die Summanden w_i eindeutig bestimmt.

(iii) Es gilt $V = W_1 + \cdots + W_n$ und für eine Darstellung $0 = w_1 + \cdots + w_n$ mit $w_i \in W_i$ gilt, dass $w_1 = \cdots = w_n = 0$.

(iv) Wählt man sich Basen $B^i = (b^i_1, \dots, b^i_{k_i})$ für die Unterräume W_i, dann bilden die Elemente $(b^1_1, \dots, b^1_{k_1}, b^2_1, \dots, b^2_{k_2}, \dots, b^n_1, \dots, b^n_{k_n})$ zusammen eine Basis von V.

(v) Es gilt $V = W_1 + \cdots + W_n$ und $\dim(V) = \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_n)$.

(Bemerkung: Man sieht mit diesen Aussagen leicht, dass $W_1 + \cdots + W_n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ genau dann, wenn $(W_1 + \cdots + W_{n-1}) + W_n = (W_1 + \cdots + W_{n-1}) \oplus W_n$ und $W_1 + \cdots + W_{n-1} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1}$.)