Übungsblatt 11

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 03.07.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H32 (10 Punkte): Betrachten Sie die symmetrische reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A bezgl. des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$.

H33 (10 Punkte): Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Bild}(f)^\perp$, sowie $\mathrm{Bild}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)^\perp$.

(ii) Ist f normal, so gilt $\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)$, sowie $\mathrm{Bild}(f^*) = \mathrm{Bild}(f)$. Außerdem gilt dann $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus^\perp \mathrm{Bild}(f)$, wobei dies eine direkte Summe von zueinander orthogonalen Unterräumen bezeichnen soll.

(iii) Ist f antihermitesch, d.h. $f^* = -f$, dann ist f normal und alle Eigenwerte von f sind rein imaginär, d.h. liegen in $i\mathbb{R}$.

H34 (10 Punkte): Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix, d.h. $A = A^T$ und $x^TAx \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie $\det(A) \geq 0$ und genau dann $\det(A) > 0$, wenn A positiv definit ist.

Bonus: (10 Punkte) Sei V ein reeller Vektorraum zusammen mit einer Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$.
Zeigen Sie: Erfüllt die Normfunktion die Parallelogrammgleichung, d.h. gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in V$, so gibt es ein Skalarprodukt auf V, sodass die Norm die euklidische Norm bzgl. dieses Skalarproduktes ist.