Übungsblatt 12

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 10.07.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H35 (10 Punkte): Mittels des *symmetrischen Gauß-Algorithmus* kann man die Gram-Matrix einer quadratischen Form bzw. einer Bilinearform diagonalisieren. Dabei führt man wie gewohnt in jedem Schritt eine elementare Zeilenumformung durch und wendet anschließend dieselbe Umformung auf die entsprechende Spalte an.
Benutzen Sie den Algorithmus, um die folgenden Gram-Matrizen über einem Körper K zu diagonalisieren. Nehmen Sie **falls nötig** an, dass die Charakteristik des Körpers K ungleich 2 ist, beweisen Sie in diesen Fällen die Notwendigkeit.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 2 & -6 & 16 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

H36 (10 Punkte):

(i) Sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum (endlich-dimensional, Charakteristik von $K \neq 2$) und $U \subset V$ ein Teilraum. Es sind äquivalent:

1. q_U ist nicht ausgeartet.
2. $U \cap U^\perp = \{0\}$.
3. $q_{U^\perp}$ ist nicht ausgeartet.
4. $V = U + U^\perp$.
5. $V = U \oplus U^\perp$.
6. Jede Orthogonalbasis von (U, q_U) lässt sich zu einer Orthogonalbasis von (V, q) fortsetzen.

(ii) Sei (V, q) ein (beliebiger) quadratischer Raum über K, Sei $W \subset V$, sodass $V = V^\perp \oplus W$. Dann ist (W, q_W) nicht ausgeartet.

H37 (10 Punkte): Sei (V, q) ein isotroper nicht ausgearteter quadratischer Raum der Dimension 2. Dann existieren Vektoren $u, v \in V$ mit

$$q(u) = q(v) = 0, \qquad \beta(u, v) = 1.$$

Die Vektoren u, v bilden eine Basis von V mit zugehöriger Strukturmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Es gibt also bis auf Isometrie nur einen nichtausgearteten isotropen quadratischen Raum der Dimension 2. Dieser wird *hyperbolische Ebene* genannt und besitzt die obige Matrix als Standard-Gram-Matrix.

Bonus: (10 Punkte) Sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum der Dimension n. Dann besitzt (V, q) eine orthogonale Summenzerlegung

$$V = H_1 \oplus \ldots \oplus H_m \oplus W,$$

wobei die Räume $H_1, \ldots, H_m$ hyperbolische Ebenen sind und $W \subset V$ ein nicht ausgearteter anisotroper Unterraum ist. Die Summanden sind bis auf Isometrie eindeutig durch (V, q) bestimmt. Die Zahl m ist die Dimension eines maximalen total isotropen Teilraums. Sie heißt Witt-Index von (V, q).