Übungsblatt 3

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Mittwoch, den 02.05.18, um 9:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf **jedes** Blatt und Ihre **Matrikelnummer, Übungsgruppennummer** und den **Namen des Übungsleiters** auf das erste Blatt. Bitte heften Sie die Blätter.

H7 (10 Punkte): Sei A die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -13 & -5 & -15 \\ -5 & -2 & -6 \\ 13 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass A betrachtet als Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht diagonalisierbar ist.

(ii) Fassen wir dagegen A als Matrix mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ auf, so ist A diagonalisierbar. Bringen Sie A über $\mathbb{F}_5$ in Diagonalform.

(Es stehe dazu eine natürliche Zahl n hier für das Element $n \cdot \mathbf{1} \in \mathbb{F}_5$, also für die Summe $\overbrace{\mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}^{n}$. Siehe auch Kapitel 2 im Skript zu den Körpern $\mathbb{F}_p$.)

H8 (10 Punkte): Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass A als Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonalisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass A aufgefasst als Matrix in $(\mathbb{F}_3)^{2\times 2}$ nicht diagonalisierbar ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \phi \in \mathbb{R},$$

im Allgemeinen nicht über $\mathbb{R}$ jedoch stets über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind. Bringen Sie R_ϕ über $\mathbb{C}$ in Diagonalform.

H9 (10 Punkte): Seien $A, B \in K^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen über einem Körper K, sodass $AB = BA$. Es seien weiter alle Eigenräume von A und B eindimensional. Zeigen Sie, dass A und B die gleichen Eigenvektoren besitzen.

Bonus (10 Punkte): Sei $M \subset K^{n \times n}$ eine Menge von diagonalisierbaren Matrizen, sodass für je zwei Matrizen $A, B \in M$ gilt $AB = BA$.
Zeigen Sie, dass es eine Basis von K^n gibt, die aus gemeinsamen Eigenvektoren zu allen Matrizen aus M besteht. D.h. mit anderen Worten, dass die Matrizen aus M simultan diagonalisierbar sind. Sie dürfen verwenden, dass eine diagonalisierbare Matrix, die einen Unterraum invariant lässt, auch auf diesem Unterraum diagonalisierbar ist.