Übungsblatt 4

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 08.05.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf **jedes** Blatt und Ihre **Matrikelnummer, Übungsgruppennummer** und den **Namen des Übungsleiters** auf das erste Blatt. Bitte heften Sie die Blätter.

H10 (5 Punkte): Sei $f : V \to V$ ein Vektorraumendomorphismus. Wir betrachten die Einsetzungsabbildung $K[X] \to \mathrm{End}(V)$, $P(X) \mapsto P(f)$, die in Polynome die Abbildung f für X einsetzt,

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \mapsto f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_0 \,\mathrm{id}\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Einsetzungsabbildung ein Ringhomomorphismus, sowie ein K-Vektorraumhomomorphismus ist, d.h.

$$\begin{gathered}(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f) \quad \text{und} \quad (P + Q)(f) = P(f) + Q(f),\\ (\lambda P)(f) = \lambda \cdot P(f),\\ (1 \mapsto \mathrm{id})\end{gathered}$$

für Polynome $P, Q \in K[X]$.

(ii) Zeigen Sie, dass das Bild $K[f]$ des Einsetzungshomomorphismus ein **kommutativer** Unterring von $\mathrm{End}(V)$ ist, d.h. $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

(Bemerkung: Das Bild $K[f]$ ist die von f und id erzeugte Unteralgebra der K-Algebra $\mathrm{End}(V)$.)

H11 (10 Punkte): Seien $P, Q \in K[X]$ teilerfremd. Dann existieren $A, B \in K[X]$ mit $AP + BQ = 1$.
Hinweis: Wenden Sie den euklidischen Algorithmus auf P und Q an.

H12 (5 Punkte): Zeigen Sie den Satz von Cayley-Hamilton durch direkte Berechnung für 2×2-Matrizen in $K^{2\times 2}$. Setzen Sie also eine allgemeine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in ihr charakteristisches Polynom P_A ein und zeigen Sie, dass dieses die Matrix A annulliert.

H13 (10 Punkte): Ein *Ideal* $I \subset K[X]$ von $K[X]$ ist eine Menge von Polynomen, die abgeschlossen unter der Addition und der (äußeren) Multiplikation mit beliebigen Polynomen aus $K[X]$ ist, d.h. für P, $Q \in I$ sowie Polynome $R \in K[X]$ soll gelten, dass $P+Q \in I$ und $R \cdot P \in I$. Damit ist ein Ideal auch automatisch ein K-Untervektorraum (aber nicht notwendig ein Unterring, denn es muss nicht $1 \in I$ sein).

(i) Zeigen Sie, dass jedes Ideal $I \subset K[X]$, $I \neq \{0\}$, einen normierten Erzeuger hat, d.h. es gibt ein normiertes Polynom $P \in I$ mit $I = (P) = \{L \cdot P \mid L \in K[X]\}$. Es ist P das eindeutige normierte Polynom kleinsten Grades in I.

(Bemerkung: Umgekehrt sind Mengen der Form (P) natürlich Ideale.)

(ii) Sei $f : V \to V$ ein K-Vektorraumendomorphismus (V sei endlich-dimensional). Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{Kern}(K[X] \to \mathrm{End}(V))$$
für die Einsetzungsabbildung $P(X) \mapsto P(f)$ ein Ideal in $K[X]$ ist und dass dieses Ideal nicht nur aus dem Nullpolynom besteht.

(iii) Man nennt den normierten Erzeuger M_f des Kerns der Einsetzungsabbildung $K[X] \to K[f]$ auch das *Minimalpolynom* von f. Es ist das eindeutige normierte Polynom kleinsten Grades, das f annulliert.

Zeigen Sie, dass $M_f \mid P_f$.