# Übungsblatt 5

## Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 15.05.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

**H14 (10 Punkte):**

(i) Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar und vertauschbar, so sind auch $f \circ g$ und $f \pm g$ diagonalisierbar.

(ii) Sind $f$ und $g$ vertauschbar, so gilt $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Sind $f$ und $g$ beide nilpotent und miteinander vertauschbar, so sind auch $f+g$ und $f \circ g$ nilpotent.

(iv) Finden Sie für jedes $n > 1$ ein Beispiel für nilpotente Endomorphismen $f : K^n \to K^n$ und $g : K^n \to K^n$, für die $f \circ g$ nicht nilpotent ist.

**H15 (10 Punkte):** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von $A$ und bestimmen Sie die zugehörigen Haupträume. Finden Sie das Minimalpolynom von $A$ (siehe Aufgabe H13).

**H16 (10 Punkte):** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $V$ ein Vektorraum, $g : V \to V$ ein Isomorphismus und $h : V \to V$ eine nilpotente lineare Abbildung. Wenn $g$ und $h$ vertauschbar sind, so ist $g + h$ ein Isomorphismus.

**Hinweis:** Reduzieren Sie das Problem auf den Fall $g = \mathrm{Id}_V$. Versuchen Sie dann ein Inverses zu finden!

(ii) Sei $f$ ein Endomorphismus von $V$ dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt und sei $f = g + h$ die Jordan-Zerlegung von $f$ wie in Satz 6.20. Die Abbildung $f$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $g$ einer ist.

(iii) Finden Sie die inverse Matrix zu dem Jordanblock

$$J_\lambda(n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$