Übungsblatt 6

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 29.05.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H17 (10 Punkte):

(i) Zeigen Sie, dass für den Jordanblock

$$J_\lambda(n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

gilt, dass $M_{J_\lambda(n)} = P_{J_\lambda(n)} = (X-\lambda)^n$, für das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom.

(ii) Zeigen Sie, dass für eine quadratische Matrix $A = \operatorname{diag}(C_1, \ldots, C_k)$ in Blockdiagonalform mit Blöcken C_i gilt, dass $M_A = \operatorname{kgV}(M_{C_1}, \ldots, M_{C_k})$.

(iii) Zeigen Sie, dass für Matrizen in $K^{n\times n}$, deren charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, die Jordannormalform eindeutig durch das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom bestimmt ist, wenn $n \leq 3$.

(iv) Finden Sie zwei 4×4-Matrizen mit (wesentlich) unterschiedlicher Jordannormalform, die dieselben charakteristischen Polynome und Minimalpolynome besitzen.

H18 (10 Punkte): Bringen Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -32 & -32 & -35 \\ 1 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

auf Jordannormalform. Bestimmen Sie für die Matrix B auch explizit eine dazugehörige Jordanbasis.

H19 (10 Punkte): In dieser Aufgabe betrachten wir die e-Funktion für Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ oder $\mathbb{R}^{n\times n}$. Sei A eine solche Matrix. Dann definieren wir $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Diese Reihe konvergiert für alle reellen oder komplexen Matrizen bzgl. einer beliebigen Matrixnorm und definiert eine Abbildung $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt $e^{A+B} = e^A e^B$ für Matrizen A, B mit $AB = BA$ (sonst gilt diese Funktionalgleichung der e-Funktion nicht!).

(i) Zeigen Sie, dass $e^{S^{-1}AS} = S^{-1}e^A S$ für invertierbare Matrizen S.

(ii) Zeigen Sie, dass für eine Matrix $A = \mathrm{diag}(C_1, \dots, C_m)$ in Blockdiagonalform gilt, dass $e^A = \mathrm{diag}(e^{C_1}, \dots, e^{C_m})$.

(iii) Berechnen Sie $e^{J_\lambda(n)}$ für den Jordanblock $J_\lambda(n)$.

(iv) Zeigen Sie, dass $\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)}$ für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Hinweis: Über $\mathbb{C}$ zerfallen alle Polynome in Linearfaktoren.

Bonus (5 Punkte): Berechnen Sie

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{pmatrix}}$$

für $\phi \in \mathbb{R}$.