Übungsblatt 8

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 12.06.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H23 (10 Punkte): Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ mit der Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\beta((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) := -2x_1y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$.

(i) Stellen Sie die Gram-Matrix von β bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ auf.

(ii) Zeigen Sie, dass β nicht ausgeartet ist.

(iii) Gibt es Vektoren $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, sodass $\beta(v, v) = 0$?

(iv) Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$, sodass die Gram-Matrix von β bezüglich der neuen Basis Diagonalform hat.

H24 (10 Punkte): Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für einen Endomorphismus $f : V \to V$ äquivalent sind:

(i) f ist eine Isometrie bzgl. β, d.h. $\beta(f(x), f(y)) = \beta(x, y)$ für alle $x, y \in V$.

(ii) f ist invertierbar und $f^{-1} = f^*$, wobei f^* den bzgl. β zu f adjungierten Endomorphismus bezeichnet. Insbesondere gilt $f^{**} = f$.

(iii) Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, B die Gram-Matrix von β und A die Darstellungsmatrix von f bzgl. der gewählten Basis, so gilt $B = A^T BA$.

H25 (10 Punkte): Seien V und W beides K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei weiter $U \subset V$ ein Unterraum mit $U \subset \mathrm{Kern}(f)$. Wir erinnern an die Definition des Faktorraums V/U aus Gruppenübung 6.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{f} : V/U &\to W \\ v + U &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

wohldefiniert und linear ist, und dass $f = \overline{f} \circ \pi$ gilt, wobei $\pi : V \to V/U$ die kanonische Projektion bezeichne (siehe Gruppenübung 6). Wir sagen auch, dass f über V/U *faktorisiert*.

Zeigen Sie auch, dass $\overline{f}$ eindeutig durch die Gleichung $f = \overline{f} \circ \pi$ bestimmt ist und dass $\mathrm{Kern}(\overline{f}) = \mathrm{Kern}(f)/U = \pi(\mathrm{Kern}(f))$.

(ii) Sei g ein Endomorphismus von V und $U \subset V$ ein g-invarianter Unterraum, d.h. $g(U) \subset U$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} g' : V/U &\to V/U \\ v + U &\mapsto g(v) + U \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von V/U ist und dass die folgende Gleichung für die charakteristischen Polynome gilt (für $\dim(V) < \infty$):

$$P_g = P_{g|_U} \cdot P_{g'}.$$

(Hinweis: Stellen Sie die Abbildungsmatrix von g bzgl. einer speziellen Basis auf. Fangen Sie mit einer Basis $(u_1, \ldots, u_k)$ von U an und ergänzen Sie diese mit Vektoren $(u_{k+1}, \ldots, u_l)$ zu einer Basis von V. Zeigen Sie, dass dann $\pi(u_{k+1}), \ldots, \pi(u_l)$ eine Basis von V/U ist.)

Bonus (5 Punkte): Zeigen Sie, dass für einen Unterraum $X \subset V$ gilt, dass $X^0 \cong (V/X)^*$, wobei hier kanonische Isomorphie vorliegt.