Übungsblatt 9

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 19.06.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H26 (10 Punkte): Sei V ein K-Vektorraum und $\beta : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V. Sei weiter B eine Basis von V und G die Gram-Matrix von β bezüglich B.

(i) Zeigen Sie, dass β genau dann symmetrisch ist, d.h. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ für alle $x, y \in V$, wenn $G = G^T$.

(ii) Zeigen Sie, dass β genau dann schiefsymmetrisch ist, d.h. $\beta(x, y) = -\beta(y, x)$ für alle $x, y \in V$, wenn $G = -G^T$.

H27 (10 Punkte):

(i) Wir betrachten den n-dimensionalen reellen Vektorraum P_n der reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner n auf dem Einheitsintervall,

$$P_n := \{p : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ Polynomfunktion}, \ \operatorname{grad}(p) < n\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\langle p_1, p_2\rangle := \int_0^1 p_1(x)p_2(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf P_n definiert. Ist die Standardbasis $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ eine Orthonormalbasis?

(ii) Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der reellen $n \times n$-Matrizen definieren wir

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{Spur}(B^T A).$$

Zeigen Sie, dass dadurch ein Skalarprodukt definiert wird.

H28 (10 Punkte): Sei V ein reeller Vektorraum und $\langle\cdot, \cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V.
Zeigen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

für alle $x, y \in V$. Zeigen Sie auch, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.
(Hinweis: Nutzen Sie $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ aus.)