Gruppenübungen 6

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 28.5.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subset V$ ein Unterraum von V. Wir definieren auf V eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U.$$

Sei V/U die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Wir benutzen die Notation $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ für die Äquivalenzklasse in V/U, die v enthält. Die Menge V/U wird zu einem K-Vektorraum, indem wir die Addition

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2 + U), \quad v_1, v_2 \in V$$

und die Skalarmultiplikation

$$\lambda(v + U) := (\lambda v + U), \quad v \in V,\ \lambda \in K$$

definieren. Man nennt V/U den *Faktorvektorraum* von V nach U.

(i) Zeigen Sie, dass die Addition und Skalarmultiplikation auf V/U wohldefiniert sind und V/U zu einem K-Vektorraum machen.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi : V \to V/U$ mit $v \mapsto (v + U)$ ein surjektiver Vektorraumhomomorphismus ist mit $\mathrm{Kern}(\pi) = U$. Diese wird auch als kanonische Projektion bezeichnet.

(iii) Zeigen Sie die Dimensionsformel $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$.