

Gruppenübungen 8

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 11.6.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei V ein euklidischer Vektorraum. Auf diesem können wir die euklidische Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definieren. Für diese gilt die Dreiecksungleichung: $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. Weiter definieren wir die Abstandsfunktion $d(x, y) := \|x - y\|_2$.

Sind folgende Aussagen richtig? Wenn nicht, überlegen Sie sich ein Gegenbeispiel.

- (i) $d(x, x) > 0$
- (ii) $d(x, x) = 0$
- (iii) $d(x, y) > 0$ für alle $x \neq y$
- (iv) $d(\lambda x, y) = \lambda d(x, y)$
- (v) $d(x, y) = d(y, x)$
- (vi) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- (vii) $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$

Aufgabe 2: Sei V ein Vektorraum und $U, W \subset V$ Unterräume mit $U + W = V$. Zur Erinnerung: Die Summe $U + W$ von Unterräumen ist definiert als die Menge

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

der Summen von Elementen aus diesen Unterräumen und stimmt mit dem von den Unterräumen erzeugten Vektorraum überein, $U + W = \text{Lin}(U \cup W)$.

Die Summe heißt direkt, geschrieben $U + W = U \oplus W$, wenn gilt, dass $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Direktheit der Summe äquivalent zu jeder der folgenden Bedingungen ist (für (iii) nehmen wir $\dim(V) < \infty$ an):

- (i) Gilt $u + w = 0$ mit $u \in U, w \in W$, dann folgt schon $u = w = 0$.
- (ii) Für $v \in V$ ist die Summenzerlegung $v = u + w$, $u \in U, w \in W$ eindeutig.
- (iii) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.