

Gruppenübungen 9

Die Gruppenübungen sind zum gemeinsamen Bearbeiten während der Übungsgruppen (in der Woche vom 18.6.) gedacht. Sie müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bewertet.

Aufgabe 1: Sei V ein euklidischer Vektorraum. Wir definieren den Winkel $\angle(x, y)$ zwischen zwei Vektoren $0 \neq x, y \in V$ als die eindeutig bestimmte Zahl $0 \leq \phi \leq \pi$, sodass

$$\cos \phi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}$$

mit der euklidischen Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

- (i) Zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist.
- (ii) Zeigen Sie dann den Kosinussatz:

$$\|x - y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\|x\|_2 \|y\|_2 \cos \phi$$

mit dem Winkel ϕ zwischen x und y .

- (iii) Berechnen Sie den Winkel zwischen der konstanten Funktion 1 und der Identität x auf dem Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, wobei der euklidische Vektorraum der Raum der Polynomfunktionen auf dem Einheitsintervall vom Grad kleiner 2 sein soll, mit dem Skalarprodukt $\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x) dx$.