Übungsblatt 1

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 17.04.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf **jedes** Blatt und Ihre **Matrikelnummer, Übungsgruppennummer** und den **Namen des Übungsleiters** auf das erste Blatt. Bitte heften Sie die Blätter.

H1 (10 Punkte): Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze. Die Eigenwerte sind die Nullstellen der (Polynom-)Funktion

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda E - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & 3 & 3 \\ 2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)^2(\lambda-4) + (\lambda+1)(6) - (\lambda-4)(6) - 18 - 12 + (\lambda+1)(6) \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2. \end{aligned}$$

Als Nullstellen erhalten wir ± 1 und 2. Damit liegen drei verschiedene Eigenwerte $-1, 1, 2$ vor und die dazugehörigen Eigenräume von Eigenvektoren sind jeweils eindimensional.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert -1 sind als Lösungen ($\neq 0$) von

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix} v = 0$$

gegeben. Man erhält als einen Basisvektor des Eigenraums z.B. $(-1, -1, 1)^T$.
Für die anderen beiden Eigenwerte erhält man analog z.B. die Eigenvektoren $(0, -1, 1)^T$ (für den Eigenwert 1) und $(-1, 0, 1)^T$ (für den Eigenwert 2) als Basisvektoren des Eigenraums.

H2 (10 Punkte): Alle Matrizen sind hier quadratische Matrizen über einem Körper.

(i) Zeigen Sie, dass jeder Vektor $v \neq 0$ im Kern einer Matrix ein Eigenvektor dieser Matrix ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(ii) Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor einer Matrix zum Eigenwert 0 im Kern dieser Matrix liegt.

(iii) Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor einer Matrix A zu einem Eigenwert ungleich Null im Bild der zugehörigen Abbildung f_A liegt. Dabei ist $f_A : K^n \to K^n$ mit $x \mapsto Ax$.

Lösungsskizze. (i) Das ist trivial. Die Elemente des Kerns bilden den Eigenraum zum Eigenwert Null.

(ii) Trivial.

(iii) Gilt $Av = \lambda v$ mit $\lambda \neq 0$, dann $A.\frac{1}{\lambda}v = v$ und v ist im Bild von f_A.

H3 (10 Punkte):

(i) Bestimmen Sie den Rang und die Dimension des Kerns der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

die nur aus Einsen besteht.

(ii) Bestimmen Sie den Kern der Matrix A.

(iii) Bestimmen Sie das Bild von f_A.

(iv) Hat die Matrix A eine Basis aus Eigenvektoren? Wenn ja, diagonalisieren Sie A.

Lösungsskizze. (i) Der Rang ist offensichtlich 1, da das Bild von f_A (was der von den Spaltenvektoren von A aufgespannte Unterraum ist) schon von einem beliebigen Spaltenvektor (der auch $\neq 0$ ist) von A aufgespannt wird.

Der Kern ist damit $(n-1)$-dimensional.

(ii) Der Kern besteht aus der Menge der Vektoren v mit $(1, \dots, 1)v = 0$. Man hat z.B. eine Basis des Kerns der Form $(-1, 1, 0, \dots, 0)^T$, $(-1, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, $(-1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, usw.

(iii) Das Bild ist der von $(1, \dots, 1)^T$ aufgespannte Untervektorraum.

(iv) Man hat schon den $(n-1)$-dimensionalen Kern als Eigenraum zum Eigenwert null. Es fehlt also nur noch ein weiterer Eigenwert für die Diagonalisierbarkeit. Der Vektor $(1, 1, \dots, 1)^T$ wird von A auf $(n, n, \dots, n)^T = n(1, 1, \dots, 1)$ abgebildet und ist Eigenvektor zum Eigenwert n (wir nehmen an, dass A eine Matrix über $\mathbb{R}$ ist, oder zumindest dass die Charakteristik des Körpers nicht n teilt...).

Daher kann man A zu

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisieren.

(Das *charakteristische Polynom* $P_A(\lambda)$ von A ist dann offenbar $P_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^{n-1}(\lambda - n)$.)