# Übungsblatt 10

## Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 26.06.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

**H29 (10 Punkte):** Eine Übung zum Gram-Schmidt-Verfahren. Es seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gegeben. Es sei $U = \mathrm{Lin}(a, b)$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezgl. des Standardskalarprodukts auf dem $\mathbb{R}^4$.

**Lösungsskizze.** Wir berechnen zuerst eine Basis des orthogonalen Komplements: Sei dazu

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

definiert. Dann ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ als Kern von $A$ gegeben. Eine Basis des Kerns ist z. B. $(v_0 := (-2, 5, 3, 0)^T, v_1 := (-1, 1, 0, 3)^T)$. Wir wenden noch das Gram-Schmidt-Verfahren auf diese beiden Vektoren an: Zuerst normieren wir $v_0$: Wir erhalten $v_0' = \frac{1}{\sqrt{38}} v_0$. Dann setzen wir $\tilde{v}_1 := v_1 - \langle v_1, v_0' \rangle v_0'$. Wir erhalten $\tilde{v}_1 = \frac{3}{38}(-8, 1, -7, 38)^T$. Durch Normierung erhalten wir $v_1' = \frac{1}{4\sqrt{31}}(-8, 1, -7, 38)^T$. Wir haben damit eine gewünschte Orthonormalbasis $(v_0', v_1')$ gefunden.

**H30 (10 Punkte):** Sei $V$ ein $n$-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Wir nennen $f$ unitär, wenn $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$. Wir nennen eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär, wenn $A^* A = A A^* = E_n$ mit der adjungierten Matrix $A^* := \overline{A}^T$. Außerdem sei die euklidische Norm $\|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}^+$ definiert durch $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

(i) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Die Abbildung $f$ ist unitär.
2. Es gilt $f^* \circ f = f \circ f^* = \mathrm{id}$ mit der Adjungierten $f^*$ von $f$.
3. Für eine Orthonormalbasis $B$ von $V$ ist die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}_B(f)$ unitär.

(ii) Eine Matrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann unitär, wenn die Spalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bezgl. des Standardskalarprodukts bilden.

(iii) Es gilt die Parallelogrammgleichung: $\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$ für alle $x, y \in V$.

**Lösungsskizze.** (i) Bezeichnen $x_B, y_B$ die Koordinatenvektoren von $x$ und $y$ bezgl. der Basis $B$, dann gilt $\langle x, y\rangle = x_B^T \overline{y_B}$. Außerdem gilt dann $\langle f(x), f(y)\rangle = (\mathcal{M}_B(f)x_B)^T\overline{(\mathcal{M}_B(f)y_B)} = x_B^T(\mathcal{M}_B(f)^T\overline{\mathcal{M}_B(f)})\overline{y_B}$. Daraus folgt leicht die Äquivalenz von 1 und 3. Alternativ ist $\mathcal{M}_B(f)^* = \mathcal{M}_B(f^*)$ und die Aussage folgt aus der Äquivalenz von 1 und 2. Diese Äquivalenz rechnet man genauso einfach nach, wie die analoge Aussage für Adjungierte von Isometrien bzgl. allgemeiner Bilinearformen.

(ii) Das folgt fast direkt aus der Gleichung $A^*A = E_n$.

(iii) Das ist einfaches Nachrechnen.

**H31 (10 Punkte):** Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $W_1, \dots, W_n$ Unterräume. Wir nennen die Summe $W_1 + \dots + W_n$ von Unterräumen direkt, geschrieben $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$, wenn stets $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{0\}$ für alle $i = 1 \dots n$.
Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$.

(ii) Es gilt $V = W_1 + \dots + W_n$ und in jeder Darstellung $v = w_1 + \dots + w_n$ für $v \in V$ mit $w_i \in W_i$ sind die Summanden $w_i$ eindeutig bestimmt.

(iii) Es gilt $V = W_1 + \dots + W_n$ und für eine Darstellung $0 = w_1 + \dots + w_n$ mit $w_i \in W_i$ gilt, dass $w_1 = \dots = w_n = 0$.

(iv) Wählt man sich Basen $B^i = (b_1^i, \dots, b_{k_i}^i)$ für die Unterräume $W_i$, dann bilden die Elemente $(b_1^1, \dots, b_{k_1}^1, b_1^2, \dots, b_{k_2}^2, \dots, b_1^n, \dots, b_{k_n}^n)$ zusammen eine Basis von $V$.

(v) Es gilt $V = W_1 + \dots + W_n$ und $\dim(V) = \dim(W_1) + \dots + \dim(W_n)$.

(Bemerkung: Man sieht mit diesen Aussagen leicht, dass $W_1 + \dots + W_n = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ genau dann, wenn $(W_1 + \dots + W_{n-1}) + W_n = (W_1 + \dots + W_{n-1}) \oplus W_n$ und $W_1 + \dots + W_{n-1} = W_1 \oplus \dots \oplus W_{n-1}$.)

**Lösungsskizze.** Die Aussagen (ii) und (iii) sind äquivalent, siehe letzte Gruppenübung. Die Aussage (iv) ist zu (iii) äquivalent: Gilt (iii), dann ist die Menge der $b_j^i$ aus (iv) schon eine Erzeugermenge, da $V$ von den $W_i$ erzeugt wird. Die lineare Unabhängigkeit folgt auch schnell: Wenn man eine Linearkombination der Null $\sum_{i,j}\lambda_j^i b_j^i = 0$ betrachtet, dann folgt aus der (iii), dass schon die Teilkombinationen aus den einzelnen $W_i$ null sein müssen, $\sum_j \lambda_j^i b_j^i = 0$ für festes $i$, und dann folgt die Aussage aus der linearen Unabhängigkeit der $b_j^i$ für festes $i$. Umgekehrt folgt aus (iv) schon (iii), man stelle die $w_i$ einfach in Basisschreibweise bzgl. Basen $B^i$ von $W_i$ dar und benutze die lineare Unabhängigkeit der $b_j^i$, um zu sehen, dass alle $w_i$ null sind. Trivialerweise wird $V$ von den $W_i$ erzeugt, wenn (iv) gilt.
Die letzten beiden Aussagen sind auch äquivalent: Gilt (iv), dann folgt sofort (v). Gilt (v), dann bilden die Elemente $b_j^i$ aus (iii) in jedem Fall ein Erzeugersystem. Die

Anzahl der Vektoren in diesem Erzeugersystem ist gleich der Dimension von $V$ nach (v) und damit bilden die $b_j^i$ schon eine Basis.
Zuletzt zeigen wir noch, dass (iii) und (i) äquivalent sind: Gilt (i) und hat man eine Summendarstellung der 0 mit Summanden $w_j$, dann ist $w_i = -(w_1 + \cdots + w_{i-1} + w_{i+1} + \cdots + w_n)$ und $w_i$ liegt im entsprechenden Schnitt von $W_i$ mit der Summe der restlichen Unterräume, woraus mit (i) $w_i = 0$ folgt. Gilt dagegen (iii) und hat man ein $x \in W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j$, dann kann man $0 = x + -x$ schreiben, wobei man wiederum $-x$ als Summe von Elementen $w_j \in W_j$ mit $j \neq i$ schreiben kann, da $x$ insbesondere auch in $\sum_{j \neq i} W_j$ liegt. Dann folgt mit (iii), dass alle Summanden in einer solchen Darstellung null sind, also insbesondere $x = 0$.