Übungsblatt 11

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 03.07.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H32 (10 Punkte): Betrachten Sie die symmetrische reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A bezgl. des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$.

Lösungsskizze. Es gilt $P_A(x) = x^3 - 36x^2 + 405x - 1458 = (x-9)^2(x-18)$. Der Eigenraum zum Eigenwert 18 wird aufgespannt von $v_2 = (1,2,2)^T$. Wir können jetzt den Eigenraum zum Eigenwert 9 ganz normal berechnen oder die Theorie der selbstadjungierten Abbildungen benutzen, um zu sehen, dass dieser Eigenraum das orthogonale Komplement (bezüglich des Standardskalarprodukts) des Eigenraums zum Eigenwert 18 ist. Dieses orthogonale Komplement ist durch den Kern der Matrix $(1,2,2)$ gegeben und wird aufgespannt von $v_0 = (-2,1,0)^T, v_1 = (-2,0,1)^T$. Man überprüft sofort, dass dies tatsächlich Eigenvektoren zum Eigenwert 9 sind. Um eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren anzugeben, müssen wir noch orthonormalisieren (Gram-Schmidt). Da $\|v_0\|_2 = \sqrt{5}$ können wir $\tilde{v}_1 = 5v_1 - \langle v_1, v_0 \rangle v_0$ setzen und erhalten $\tilde{v}_1 = (-2,-4,5)^T$. Damit haben wir mit $v_0, \tilde{v}_1, v_2$ eine Basis aus Eigenvektoren gefunden, die aus paarweise zueinander orthogonalen Vektoren besteht. Man muss nur noch normieren. Wir erhalten damit als eine gesuchte ONB aus Eigenvektoren

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

H33 (10 Punkte): Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Bild}(f)^\perp$, sowie $\mathrm{Bild}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)^\perp$.

(ii) Ist f normal, so gilt $\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)$, sowie $\mathrm{Bild}(f^*) = \mathrm{Bild}(f)$. Außerdem gilt dann $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus^\perp \mathrm{Bild}(f)$, wobei dies eine direkte Summe von zueinander orthogonalen Unterräumen bezeichnen soll.

(iii) Ist f antihermitesch, d.h. $f^* = -f$, dann ist f normal und alle Eigenwerte von f sind rein imaginär, d.h. liegen in $i\mathbb{R}$.

Lösungsskizze. (i) Der Kern von f^* besteht aus den $x \in V$ mit $\langle y, f^*(x)\rangle = 0$ für alle $y \in V$. Das ist äquivalent zu $\langle f(y), x\rangle = 0$ für alle $y \in V$. Das ist die erste Aussage.

Die zweite Aussage folgt so: Da $f^{**} = f$, gilt $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f^*)^\perp$, wenn man die erste Aussage benutzt. Damit gilt $\mathrm{Kern}(f)^\perp = \mathrm{Bild}(f^*)^{\perp\perp} = \mathrm{Bild}(f^*)$.

(ii) Es gilt $\langle f^*(x), f^*(x)\rangle = \langle f(f^*(x)), x\rangle = \langle f^*(f(x)), x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle$ $(f^{**} = f)$. Daraus folgt die erste Aussage.

Die zweite Aussage folgt mit $\mathrm{Bild}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)^\perp = \mathrm{Kern}(f^*)^\perp = \mathrm{Bild}(f)$, wenn man die zweite Aussage der (i) auf f und f^* anwendet und die erste Aussage benutzt.

Die letzte Aussage folgt nun mit der ersten Aussage der (i) und der ersten Aussage der (ii).

(iii) Die Aussage über die Normalität ist klar. Dann ist auch $(f - \lambda\,\mathrm{id})$ normal für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt weiter $(f - \lambda\,\mathrm{id})^* = (f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) = (-f - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) = -(f - (-\overline{\lambda})\,\mathrm{id})$. Da die Kerne von $(f - \lambda\,\mathrm{id})$ und $(f - \lambda\,\mathrm{id})^*$ nach (ii) gleich sind, gilt $\lambda = -\overline{\lambda}$ für alle Eigenwerte und damit folgt die Aussage.

Alternativ: Sei x Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann $\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle f(x), x\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle = \langle x, -f(x)\rangle = \langle x, -\lambda x\rangle = -\overline{\lambda}\langle x, x\rangle$. Daraus folgt $(\lambda + \overline{\lambda})\langle x, x\rangle = 0$ und damit $\lambda + \overline{\lambda} = 0$, da $\langle x, x\rangle \neq 0$.

H34 (10 Punkte): Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix, d.h. $A = A^T$ und $x^TAx \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie $\det(A) \geq 0$ und genau dann $\det(A) > 0$, wenn A positiv definit ist.

Lösungsskizze. Es gibt eine Basiswechselmatrix S, sodass $S^TAS = D$ Diagonalform hat und die Diagonaleinträge entweder 1 oder 0 sind (z. B. durch das Gram-Schmidt-Verfahren, dieses funktioniert auch für nur positiv semidefinite Formen, Vektoren x mit $x^TAx = 0$ werden nicht normiert und stehen automatisch orthogonal auf allen anderen Vektoren, siehe Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Alternativ kann man die allgemeine Theorie der symmetrischen reellen Bilinearformen benutzen und eine Basis finden, mit der man A auf Diagonalform bringen kann mit Einträgen $1, -1, 0$, wobei hier -1 wegen der positiven Semidefinitheit nicht auftreten kann). Es gilt also $A = (S^{-1})^TDS^{-1}$, daraus liest man die Positivität der Determinante ab. Die Determinante ist genau dann nicht null, wenn keine 0 als Eintrag in D vorkommt, was zur positiven Definitheit äquivalent ist. (Allgemein gilt für eine positiv semidefinite hermitesche Sesquilinearform, dass sie genau dann nicht ausgeartet ist, wenn sie positiv definit ist, wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

Bonus: (10 Punkte) Sei V ein reeller Vektorraum zusammen mit einer Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$.
Zeigen Sie: Erfüllt die Normfunktion die Parallelogrammgleichung, d.h. gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in V$, so gibt es ein Skalarprodukt auf V, sodass die Norm die euklidische Norm bzgl. dieses Skalarproduktes ist.

Lösungsskizze. Zuerst ist zu bemerken, dass man ein euklidisches Skalarprodukt aus der euklidischen Norm rekonstruieren kann (Polarisierung), denn

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|_2^2 - \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2).$$

Wir setzen also $\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$. Zu zeigen ist, dass dies ein Skalarprodukt definiert. Die Symmetrie ist klar. Auch klar ist, dass $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Daraus folgt die positive Definitheit und dass die euklidische Norm mit der ursprünglichen Norm übereinstimmt, wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt ist. Dazu müssen wir nur noch zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinear ist. Wir zeigen die Additivität in der ersten Komponente: Zuerst bemerken wir, dass $\langle 0, y\rangle = 0$ nach Definition. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
&\langle x+z, y\rangle + \langle x-z, y\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|x+y+z\|^2 - \|x+z\|^2 - \|y\|^2 + \|x+y-z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y\|^2) \\
&= \|x+y\|^2 + \|z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2 - \|y\|^2 \\
&= 2\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

mit der Parallelogrammgleichung. Setzt man insbesondere $z = x$, dann erhält man $\langle 2x, y\rangle = 2\langle x, y\rangle$. Setzt man nun $x = \frac{u+v}{2}$ und $z = \frac{u-v}{2}$, dann erhält man $\langle u, y\rangle + \langle v, y\rangle = 2\langle \frac{u+v}{2}, y\rangle = \langle u+v, y\rangle$ und damit die Additivität in der ersten Komponente (die Additivität in der zweiten Komponente folgt aus der Symmetrie). Für die Homogenität ist zuerst zu bemerken, dass aus der Additivität automatisch die Homogenität für rationale Skalare folgt, d.h. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für $\lambda \in \mathbb{Q}$. Das ist für natürliche Zahlen klar. Außerdem gilt $0 = \langle x-x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$ und damit $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. Genauso gilt $\langle x, y\rangle = \langle n\cdot\frac{1}{n}x, y\rangle = n\langle\frac{1}{n}x, y\rangle$ und damit $\langle\frac{1}{n}x, y\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle$. Die Aussage für rationale Skalare folgt. Die Homogenität für reelle Skalare folgt durch ein Approximationsargument, man approximiere reelle Skalare durch rationale. Man muss nur benutzen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ stetig ist (die Topologie auf V ist die durch die Norm induzierte Topologie). Das gilt, weil die Normfunktion stetig ist, genau wie die Vektoraddition und skalare Multiplikation auf V und die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$.