Übungsblatt 12

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 10.07.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H35 (10 Punkte): Mittels des *symmetrischen Gauß-Algorithmus* kann man die Gram-Matrix einer quadratischen Form bzw. einer Bilinearform diagonalisieren. Dabei führt man wie gewohnt in jedem Schritt eine elementare Zeilenumformung durch und wendet anschließend dieselbe Umformung auf die entsprechende Spalte an.
Benutzen Sie den Algorithmus, um die folgenden Gram-Matrizen über einem Körper K zu diagonalisieren. Nehmen Sie **falls nötig** an, dass die Charakteristik des Körpers K ungleich 2 ist, beweisen Sie in diesen Fällen die Notwendigkeit.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 2 & -6 & 16 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze. Matrix A: Wir benutzen elementare Zeilenumformungen, die wir stets gleich im Anschluss auch auf die Spalten anwenden:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \\ 2 & -8 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}.$$

Matrix B: Hier nehmen wir an, dass die Charakteristik $\neq 2$ ist. Dann können wir umformen:

$$B \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrix C: Wir nehmen wieder an, dass die Charakteristik nicht 2 ist. Dann können wir umformen:

$$C \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Hier wurde zuerst die zweite Zeile zur ersten addiert und danach die zweite Spalte zur ersten Spalte.
In Körpern K der Charakteristik 2 sind B und C gleich. Hier sind diese Gram-Matrizen nicht diagonalisierbar. Es gilt nämlich stets $x^T Cx = 0$ für alle $x \in K^2$. Könnte man C auf Diagonalform D bringen, dann würde auch $x^T Dx = 0$ für alle $x \in K^2$ gelten. Das geht aber nur für $D = 0$ und dann müsste auch $C = 0$ gewesen sein.

H36 (10 Punkte):

(i) Sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum (endlich-dimensional, Charakteristik von $K \neq 2$) und $U \subset V$ ein Teilraum. Es sind äquivalent:

1. q_U ist nicht ausgeartet.
2. $U \cap U^\perp = \{0\}$.
3. $q_{U^\perp}$ ist nicht ausgeartet.
4. $V = U + U^\perp$.
5. $V = U \oplus U^\perp$.
6. Jede Orthogonalbasis von (U, q_U) lässt sich zu einer Orthogonalbasis von (V, q) fortsetzen.

(ii) Sei (V, q) ein (beliebiger) quadratischer Raum über K, Sei $W \subset V$, sodass $V = V^\perp \oplus W$. Dann ist (W, q_W) nicht ausgeartet.

Lösungsskizze. (i) 1. ist zu 2. äquivalent, da die Nichtausgeartetheit von q_U gerade bedeutet, dass aus $\beta(u, v) = 0$ für alle $u \in U$ folgt, dass $v = 0$ für $v \in U$.

2.,4.,5. sind äquivalent, da $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$ und $\dim(U + U^\perp) = \dim(V) - \dim(U \cap U^\perp)$. Außerdem ist 3. zu 2. äquivalent, wenn man die Äquivalenz von 1. und 2. auf $U^\perp$ anwendet und $U = U^{\perp\perp}$ benutzt.

Aus 5. folgt 6., denn man ergänze eine Orthogonalbasis von U einfach mit einer beliebigen Orthogonalbasis von $U^\perp$ zu einer Orthogonalbasis von V. Umgekehrt folgt aus 6. 5., denn der ergänzte Teil einer Orthogonalbasis ist eine Basis von $U^\perp$: Nur die Linearkombinationen der ergänzten Basiselemente stehen orthogonal auf U, da ansonsten für einen der Basisvektoren v aus der ursprünglichen Orthogonalbasis von U gelten müsste, dass $\beta(v, v) = 0$, was ein Widerspruch zur Nichtausgeartetheit von V wäre, da dann $v \in V^\perp$.

(ii) Wäre (W, q_W) ausgeartet, dann gäbe es ein $w \in W$, $w \neq 0$, mit $\beta(w, w') = 0$ für alle $w' \in W$. Dann würde aber auch $\beta(w, v) = 0$ gelten für alle $v \in V$, da man v schreiben kann als $v = v^\perp + w'$ mit $v^\perp \in V^\perp$ und $w' \in W$. D.h. $w \in V^\perp \cap W = \{0\}$. Widerspruch!

H37 (10 Punkte): Sei (V, q) ein isotroper nicht ausgearteter quadratischer Raum der Dimension 2. Dann existieren Vektoren $u, v \in V$ mit

$$q(u) = q(v) = 0, \qquad \beta(u, v) = 1.$$

Die Vektoren u, v bilden eine Basis von V mit zugehöriger Strukturmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Es gibt also bis auf Isometrie nur einen nichtausgearteten isotropen quadratischen Raum der Dimension 2. Dieser wird *hyperbolische Ebene* genannt und besitzt die obige Matrix als Standard-Gram-Matrix.

Lösungsskizze. Wir nehmen uns ein beliebiges $u \in V$, $u \neq 0$, mit $q(u) = 0$. Dann gibt es wegen der Nichtausgeartetheit von q ein $v' \in V$ mit $\beta(u, v') \neq 0$. Wir skalieren v' und finden ein $\tilde{v} \in V$ mit $\beta(u, \tilde{v}) = 1$. Wir machen nun den Ansatz $v = \tilde{v} + \lambda u$. Offensichtlich gilt dann stets $\beta(u, v) = 1$ unabhängig von $\lambda \in K$. Andererseits gilt

$q(v) = q(\tilde{v}) + \lambda$. Setze also $\lambda = -q(\tilde{v})$ und wir haben die gewünschten Vektoren gefunden. Sie sind offensichtlich linear unabhängig (ansonsten wäre $\beta(u, v) = 0$, da $q(u) = 0$).

Bonus: (10 Punkte) Sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum der Dimension n. Dann besitzt (V, q) eine orthogonale Summenzerlegung

$$V = H_1 \oplus \ldots \oplus H_m \oplus W,$$

wobei die Räume $H_1, \ldots, H_m$ hyperbolische Ebenen sind und $W \subset V$ ein nicht ausgearteter anisotroper Unterraum ist. Die Summanden sind bis auf Isometrie eindeutig durch (V, q) bestimmt. Die Zahl m ist die Dimension eines maximalen total isotropen Teilraums. Sie heißt Witt-Index von (V, q).

Lösungsskizze. Zur Existenz: Gibt es in V einen isotropen Vektor, dann gibt es mit der letzten Aufgabe eine hyperbolische Ebene als Unterraum, die diesen Vektor enthält. Mit der H36 (i) 5. kann man diese hyperbolische Ebene orthogonal von V abspalten. Man wendet Induktion auf das orthogonale Komplement an.
Zur Eindeutigkeit: Diese folgt aus dem Kürzungssatz von Witt. Zuerst zeigt man die Eindeutigkeit der Anzahl m der hyperbolischen Ebenen. Gäbe es eine andere solche Zerlegung von V mit mehr als m hyperbolischen Ebenen, dann wäre nach dem Kürzungssatz von Witt der anisotrope Unterraum W isomorph zu einem Raum, der hyperbolische Ebenen enthalten würde, was nicht sein kann, da W keine isotropen Elemente enthält.
Die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie von W folgt nun wieder mit dem Kürzungssatz von Witt.
Die Anzahl m der hyperbolischen Ebenen ist die Dimension eines maximal total isotropen Teilraums: Wählt man sich aus jeder der hyperbolischen Ebenen einen isotropen Vektor, dann spannen diese zusammen einen total isotropen Teilraum der Dimension m auf. Hat man umgekehrt eine Basis eines total isotropen Teilraums, dann ist die Länge der Basis durch m beschränkt: Spaltet man von V eine hyperbolische Ebene ab, die einen der Basisvektoren enthält, dann kann man leicht nachrechnen, dass die Projektionen der anderen Basisvektoren auf das orthogonale Komplement dieser hyperbolischen Ebene ebenfalls eine Basis eines total isotropen Unterraumes des Komplements bilden (man kann die hyperbolische Ebene auch so wählen, dass die anderen Basiselemente tatsächlich im orthogonalen Komplement enthalten sind) und das Komplement kann man als Summe von $m - 1$ hyperbolischen Ebenen mit einem anisotropen Unterraum schreiben. Die Behauptung folgt mit Induktion über m.