Übungsblatt 2

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 24.04.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf **jedes** Blatt und Ihre **Matrikelnummer, Übungsgruppennummer** und den **Namen des Übungsleiters** auf das erste Blatt. Bitte heften Sie die Blätter.

H4 (10 Punkte): Sei K ein Körper und

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$$

ein normiertes Polynom n-ten Grades über K. Wir wollen zeigen, dass es eine $n \times n$-Matrix gibt, die P als charakteristisches Polynom besitzt. Dazu definieren wir die *Begleitmatrix* $M_P \in K^{n\times n}$ zu P wie folgt:

$$M_P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von M_P gleich dem Polynom P ist.
Lösungsskizze. Wir müssen $\det(XE - M_P)$ berechnen. Dazu entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile und benutzen Induktion:

$$\begin{vmatrix} X & & & & a_0 \\ -1 & X & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & X & a_{n-2} \\ & & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & & & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & X & a_{n-2} \\ & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & X \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$= X\left(X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_1\right) + a_0 = P.$$

H5 (10 Punkte): Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen.

(i) Geben Sie alle Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ vom Grad kleiner oder gleich 2 an. Welche Polynome stellen dieselbe Polynomfunktion dar?

(ii) Für festes $x \in \mathbb{F}_p$ betrachten wir die Funktion $\delta_x : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ mit

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für $y \in \mathbb{F}_p$. Zeigen Sie, dass δ_x für jedes $x \in \mathbb{F}_p$ eine Polynomfunktion ist.

(iii) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ eine Polynomfunktion ist.

Lösungsskizze. (i) Die Polynome sind $\{0, 1, X, X+1, X^2, X^2+1, X^2+X, X^2+X+1\}$. Sie gruppieren sich zu Paaren $\{\{0, X^2+X\}, \{1, X^2+X+1\}, \{X, X^2\}, \{X+1, X^2+1\}\}$ von Polynomen, die dieselbe Polynomfunktion darstellen.

(ii) Es gilt $\delta_x(X) = \frac{(X)(X-1)(X-2)...(X-(x-1))(X-(x+1))...(X-(p-1))}{(x)(x-1)...(x-(x-1))(x-(x+1))...(x-(p-1))}$.

(iii) Jede Funktion $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ ist offenbar eine Linearkombination von δ-Funktionen.

H6 (10 Punkte): Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und W ein Unterraum von V. Sei weiterhin $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f(W) \subset W$.
Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom des Endomorphismus $f|_W : W \to W$ das charakteristische Polynom von f teilt[1].

Lösungsskizze. Wir wählen uns eine Basis B von W und ergänzen diese zu einer Basis C von V. Die Darstellungsmatrix von f zu dieser Basis hat dann die folgende Blockform:

$$\mathcal{M}_C(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_B(f|_W) & M \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Mit der Definition von P_f als Determinante von $(XE - \mathcal{M}_C(f))$ und der Multiplikativität der Determinante für Matrizen in Dreiecksblockform sieht man, dass $P_f = P_{f|_W} \cdot P_N$ gilt.

[1] Ein Polynom $P(X) \in K[X]$ teilt ein Polynom $Q(X) \in K[X]$, wenn es ein Polynom $R(X) \in K[X]$ gibt, mit $P(X) \cdot R(X) = Q(X)$.