Übungsblatt 4

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 08.05.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf **jedes** Blatt und Ihre **Matrikelnummer, Übungsgruppennummer** und den **Namen des Übungsleiters** auf das erste Blatt. Bitte heften Sie die Blätter.

H10 (5 Punkte): Sei $f : V \to V$ ein Vektorraumendomorphismus. Wir betrachten die Einsetzungsabbildung $K[X] \to \mathrm{End}(V)$, $P(X) \mapsto P(f)$, die in Polynome die Abbildung f für X einsetzt,

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \mapsto f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_0 \,\mathrm{id}\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Einsetzungsabbildung ein Ringhomomorphismus, sowie ein K-Vektorraumhomomorphismus ist, d.h.

$$(P \cdot Q)(f) = P(f) \circ Q(f) \quad \text{und} \quad (P + Q)(f) = P(f) + Q(f),$$
$$(\lambda P)(f) = \lambda \cdot P(f),$$
$$(1 \mapsto \mathrm{id})$$

für Polynome $P, Q \in K[X]$.

(ii) Zeigen Sie, dass das Bild $K[f]$ des Einsetzungshomomorphismus ein **kommutativer** Unterring von $\mathrm{End}(V)$ ist, d.h. $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

(Bemerkung: Das Bild $K[f]$ ist die von f und id erzeugte Unteralgebra der K-Algebra $\mathrm{End}(V)$.)

Lösungsskizze. (i) Die Aussagen folgen daraus, dass polynomielle Ausdrücke in f genauso multipliziert und addiert werden können wie Polynome. Dazu wird nur das Assoziativgesetz, die Distributivgesetze und die Vertauschbarkeit mit Skalaren (d.h. $f(\lambda g) = \lambda(fg)$) in $\mathrm{End}(V)$ benötigt. Statt dem Assoziativgesetz würde sogar die Assoziativität für Produkte von Endomorphismen f mit sich selbst ausreichen.

Die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation ist nur ein Spezialfall der Verträglichkeit mit der Multiplikation (konstante Polynome!).

(ii) Das liegt daran, dass $K[X]$ ein kommutativer Ring ist und Bilder von kommutativen Ringen unter Ringhomomorphismen auch kommutativ sind.

H11 (10 Punkte): Seien $P, Q \in K[X]$ teilerfremd. Dann existieren $A, B \in K[X]$ mit $AP + BQ = 1$.
Hinweis: Wenden Sie den euklidischen Algorithmus auf P und Q an.

Lösungsskizze. Benutzt man die letzte Aufgabe, so kann man diese Aussage wie folgt zeigen: Die Polynom-Linearkombinationen von P, Q bilden ein Ideal (geschrieben $(P) + (Q)$). Dieses wird von einem Polynom S erzeugt $((P) + (Q) = (S))$. Es muss S damit der größte gemeinsame Teiler von P, Q sein (bis auf skalare Multiplikation eindeutig, also ist hier $S = c$ konstant), wie man leicht nachrechnet, also gilt $1 \in (S) = (P) + (Q) = (1) = K[X]$. Das ist die Aussage.
Eine konstruktive Lösung ergibt sich aus dem euklidischen Algorithmus: Es gibt mit Polynomdivision Polynome S, R mit $P = S \cdot Q + R$ und $\mathrm{grad}(R) < \mathrm{grad}(Q)$. Dann gilt $P - SQ = R$. Es sind Q und R auch teilerfremd und wir können mit Induktion über den Grad von Q schließen, dass es Polynome A, B gibt mit $AQ+BR = 1$. Damit gilt $BP + (A - BS)Q = AQ + B(P - SQ) = AQ + BR = 1$.

H12 (5 Punkte): Zeigen Sie den Satz von Cayley-Hamilton durch direkte Berechnung für 2×2-Matrizen in $K^{2\times 2}$. Setzen Sie also eine allgemeine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in ihr charakteristisches Polynom P_A ein und zeigen Sie, dass dieses die Matrix A annulliert.

Lösungsskizze. Es gilt $P_A = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$. Also

$$\begin{aligned} P_A(A) &= A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

H13 (10 Punkte): Ein *Ideal* $I \subset K[X]$ von $K[X]$ ist eine Menge von Polynomen, die abgeschlossen unter der Addition und der (äußeren) Multiplikation mit beliebigen Polynomen aus $K[X]$ ist, d.h. für $P, Q \in I$ sowie Polynome $R \in K[X]$ soll gelten, dass $P+Q \in I$ und $R\cdot P \in I$. Damit ist ein Ideal auch automatisch ein K-Untervektorraum (aber nicht notwendig ein Unterring, denn es muss nicht $1 \in I$ sein).

(i) Zeigen Sie, dass jedes Ideal $I \subset K[X]$, $I \neq \{0\}$, einen normierten Erzeuger hat, d.h. es gibt ein normiertes Polynom $P \in I$ mit $I = (P) = \{L \cdot P \mid L \in K[X]\}$. Es ist P das eindeutige normierte Polynom kleinsten Grades in I.

(Bemerkung: Umgekehrt sind Mengen der Form (P) natürlich Ideale.)

(ii) Sei $f : V \to V$ ein K-Vektorraumendomorphismus (V sei endlich-dimensional). Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Kern}(K[X] \to \mathrm{End}(V))$$

für die Einsetzungsabbildung $P(X) \mapsto P(f)$ ein Ideal in $K[X]$ ist und dass dieses Ideal nicht nur aus dem Nullpolynom besteht.

(iii) Man nennt den normierten Erzeuger M_f des Kerns der Einsetzungsabbildung $K[X] \to K[f]$ auch das *Minimalpolynom* von f. Es ist das eindeutige normierte Polynom kleinsten Grades, das f annulliert.

Zeigen Sie, dass $M_f \mid P_f$.

Lösungsskizze. (i) Das ist eine Konsequenz aus der Division mit Rest (Polynomdivision). Wir wählen uns ein Polynom $P \neq 0$ aus I mit einem kleinsten in I vorkommenden Grad (es gibt ja nach Voraussetzung Polynome ungleich Null). Dieses Polynom erzeugt I, denn sei $Q \in I$ ein anderes Polynom, dann gibt es Polynome $S, R \in K[X]$ mit $Q = S \cdot P + R$ mit $R = 0$ oder $\mathrm{grad}(R) < \mathrm{grad}(P)$. Da $Q, P \in I$ ist auch $R \in I$ (wegen den Abgeschlossenheitseigenschaften von I). Da es in I aber keine Polynome echt kleineren Grades als P geben kann, muss $R = 0$ sein und Q ist ein Vielfaches von P, was die Aussage zeigt.

Da der Grad von Polynomen nur größer werden kann, wenn man Polynome ungleich Null dranmultipliziert, besteht die Gesamtheit der Polynome P' mit $(P') = I$ genau aus den skalaren Vielfachen ungleich Null von P. Unter diesen gibt es genau ein normiertes. Alle anderen normierten Polynome in I haben echt größeren Grad.

(ii) Kerne von Ringhomomorphismen sind immer Ideale. Das kann man auch einfach nachrechnen. Man muss nur zeigen, dass für Polynome P, Q, R mit $P(f) = 0 = Q(f)$ auch $(P + Q)(f) = 0$ und $(RP)(f) = 0$ gilt, was klar ist. Z.B. ist $(RP)(f) = R(f)P(f) = R(f) \cdot 0 = 0$.

Das Ideal kann nicht nur aus dem Nullpolynom bestehen, da ansonsten das Bild $K[f]$ des Einsetzungshomomorphismus isomorph als K-Algebra zu $K[X]$ wäre. Insbesondere wären $K[f]$ und $K[X]$ als K-Vektorräume isomorph. Die Dimension von $K[X]$ ist aber unendlich (die Potenzen von X bilden eine Basis), die Dimension von $K[f]$ ist aber kleiner gleich der Dimension von $\mathrm{End}(V)$, die bei einem endlich-dimensionalen Vektorraum endlich ist (nämlich n^2, wenn n die Dimension von V ist), Widerspruch!

Alternativ hat man mit dem Satz von Cayley-Hamilton das charakteristische Polynom P_f von f als Element des Ideals. (Damit gilt auch $\dim(K[f]) \leq n$ wie man zeigen kann, vergleiche mit $\dim(\mathrm{End}(V)) = n^2$.)

(iii) Es ist P_f nach dem Satz von Cayley-Hamilton Element des Kerns der Einsetzungsabbildung! Dieser Kern wird nach Definition von M_f erzeugt, besteht also aus den Vielfachen von M_f. Das ist die Aussage.