Übungsblatt 5

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Dienstag, den 15.05.18, um 12:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden.

H14 (10 Punkte):

(i) Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar und vertauschbar, so sind auch $f \circ g$ und $f \pm g$ diagonalisierbar.

(ii) Sind f und g vertauschbar, so gilt $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Sind f und g beide nilpotent und miteinander vertauschbar, so sind auch $f+g$ und $f \circ g$ nilpotent.

(iv) Finden Sie für jedes $n > 1$ ein Beispiel für nilpotente Endomorphismen $f : K^n \to K^n$ und $g : K^n \to K^n$, für die $f \circ g$ nicht nilpotent ist.

Lösungsskizze. (i) Nach der Vorlesung oder der Bonusübung auf dem letzten Blatt können f und g gemeinsam diagonalisiert werden, d.h. es gibt eines Basis von V, die aus simultanen Eigenvektoren zu f und g besteht. Diese Basis ist offenbar auch eine Basis aus Eigenvektoren zu $f \circ g$ und $f \pm g$.

(ii) Da f und g vertauschen, kann man nach dem Ausmultiplizieren die einzelnen Produkte nach Potenzen von f und g sortieren und gleiche Binome zusammenfassen, wie in dem Beweis des binomischen Lehrsatzes.

(iii) Wenn man $f+g$ potenziert und mit dem binomischen Lehrsatz ausmultipliziert, sieht man, dass für $n \geq n' + n'' - 1$ gilt: $(f+g)^n = 0$, wenn $f^{n'} = 0$ und $g^{n''} = 0$, da dann die einzelnen Summanden schon null sind. Dass die Verkettung nilpotent ist, ist trivial da $(fg)^n = f^n g^n$. Hier reicht es aus, dass sogar nur einer der beiden Endomorphismen nilpotent ist.

(iv) Man kann den Jordanblock $J_0(n)$ und $J_0(n)^T$ nehmen (siehe H16). Das Produkt ist eine Diagonalmatrix mit Einsen und einer Null, also nicht nilpotent.

H15 (10 Punkte): Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A und bestimmen Sie die zugehörigen Haupträume. Finden Sie das Minimalpolynom von A (siehe Aufgabe H13).

Lösungsskizze. Das charakteristische Polynom ist $P_A = (x-1)^3(x-3)$ (Entwickeln nach der ersten Spalte). Die Eigenwerte sind 1 und 3. Der Hauptraum zum Eigenwert 1 ist dreidimensional und der Kern von $(A-E)^3$. Der Hauptraum zum Eigenwert 3 ist eindimensional und gleich dem Kern von $(A-3E)$, also gleich dem Eigenraum.

$$(A-E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 54 & 8 \end{pmatrix}.$$

Der Kern von $(A-E)^3$ hat als Basis z.B. $(0,1,0,0)^T$, $(-3,0,2,0)^T$, $(-2,0,0,9)^T$.

$$(A-3E) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kern von $(A-3E)$ hat als Basis z.B. $(0,0,0,1)^T$.
Wir können nach der Theorie $V = \mathbb{R}^4$ in die direkte Summe der Haupträume $V = \mathrm{Hau}(A,1) \oplus \mathrm{Hau}(A,3)$ zerlegen, die jeweils invariant unter A sind. Für das Minimalpolynom von A gilt in einer solchen Situation offenbar, dass es gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Minimalpolynome der Einschränkungen von A (betrachtet als Endomorphismus) auf diese invarianten Unterräume ist, die V zerlegen. Das charakteristische Polynom von $A|_{\mathrm{Hau}(A,1)}$ ist nach der Vorlesung $(x-1)^3$. Genauso ist das charakteristische Polynom von $A|_{\mathrm{Hau}(A,3)}$ gleich $(x-3)$. Die Minimalpolynome der Einschränkungen sind nun Teiler der charakteristischen Polynome. Damit gilt schon $M_{A|_{\mathrm{Hau}(A,3)}} = x-3$. Für den Hauptraum zum Eigenwert 1 berechnen wir, dass $\mathrm{Kern}(A-E) \neq \mathrm{Kern}(A-E)^2 = \mathrm{Kern}(A-E)^3$ (z.B. indem wir die Dimensionen berechnen). Damit ist $M_{A|_{\mathrm{Hau}(A,1)}} = (x-1)^2$.
Wir erhalten als Minimalpolynom $M_A = (x-1)^2(x-3)$.

H16 (10 Punkte): Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei V ein Vektorraum, $g : V \to V$ ein Isomorphismus und $h : V \to V$ eine nilpotente lineare Abbildung. Wenn g und h vertauschbar sind, so ist $g+h$ ein Isomorphismus.

Hinweis: Reduzieren Sie das Problem auf den Fall $g = \mathrm{Id}_V$. Versuchen Sie dann ein Inverses zu finden!

(ii) Sei f ein Endomorphismus von V dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt und sei $f = g+h$ die Jordan-Zerlegung von f wie in Satz 6.20. Die Abbildung f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn g einer ist.

(iii) Finden Sie die inverse Matrix zu dem Jordanblock

$$J_\lambda(n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Lösungsskizze. (i) $g+h$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $g^{-1}(g+h)$ ein Isomorphismus ist. Jetzt ist aber $g^{-1}(g+h) = \mathrm{id} + g^{-1}h$ und auch $g^{-1}h$ ist nilpotent. Denn auch h und g^{-1} vertauschen, wenn h und g vertauschen ($g^{-1}h = g^{-1}hgg^{-1} = g^{-1}ghg^{-1} = hg^{-1}$). Damit also $(g^{-1}h)^n = g^{-n}h^n = g^{-n}0 = 0$ für n groß genug. Wir haben das Problem also auf den Fall $g = \mathrm{id}$ reduziert.

Um zu zeigen, dass $\mathrm{id} + h$ ein Isomorphismus ist, bestimmen wir explizit ein Inverses. Dafür orientieren wir uns an der Invertierung eines Ausdruckes $1 - x$ mit der geometrischen Reihe: $(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1$. Ersetzen wir hier x mit einem nilpotenten Vektorraumendomorphismus und interpretieren wir die 1 als Identität, dann ergibt diese Formel Sinn, da die geometrische Reihe abbrechend ist. Ist n so gewählt, dass $h^n = 0$, dann gilt $(\mathrm{id} - h)\sum_{k=0}^{n-1} h^k = (\mathrm{id} - h^n) = \mathrm{id}$. Oder auch $(\mathrm{id} + h)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k h^k = \mathrm{id}$ (und genauso von rechts). Wir haben also ein explizites Inverses gefunden und die Aussage ist gezeigt.

(ii) Die Aussage folgt direkt aus der (i) und der Vertauschbarkeit von g und h und dass h nilpotent ist. (Auch f und h vertauschen offenbar.)

(iii) Wir benutzen das Verfahren aus der (i). Dazu

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = g + h$$

mit

$$g := \lambda E \quad \text{und} \quad h := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist h nilpotent.

Damit gilt $(\lambda E + h)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(E + \frac{1}{\lambda}h)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{\lambda})^k h^k$.

Die Potenzen von h kann man leicht berechnen: Für jede höhere Potenz wandert die Einserdiagonale um eins weiter nach rechts oben. Damit

$$J_\lambda(n)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} & \cdots & & (-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda^n} \\ & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} \\ & & & & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ & & & & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$